ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 22/6/2005

Esercizio 1. (punti 7)
Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2) - \sin x^2}{\cos(2x) + e^{2x^2} - 2}.$$

Esercizio 2. (punti 7)
Studiare la funzione

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 1.$$

Esercizio 3. (punti 7)
Calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\right)\quad dx.$$

Esercizio 4. (punti 6)
Dire se la serie seguente risulta convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{n+2}}.$$

Esercizio 5. (punti 6)
Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 8\,y'(t) + 15y(t) = 5\ e^{2t}.$$

S O L U Z I O N I

Esercizio 1. (punti 7)
Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)\ -\ \sin\, x^2}{\cos(2x)\ +\ e^{2x^2}\ -\ 2}.$$

Soluzione

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite:

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Sostituiamo ottenendo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)\ -\ \sin\, x^2}{\cos(2x)\ +\ e^{2x^2}\ -\ 2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{\frac{8}{3}x^4 + o(x^4)} = -\frac{3}{16}\ .$$

Esercizio 2. (punti 7)
Studiare la funzione

$$f(x)\ =\ x^4\ +\ 6x^3\ +\ 9x^2\ +\ 1.$$

Soluzioni. Il dominio di f è $\mathbb{R}$. Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio calcolando il limite:

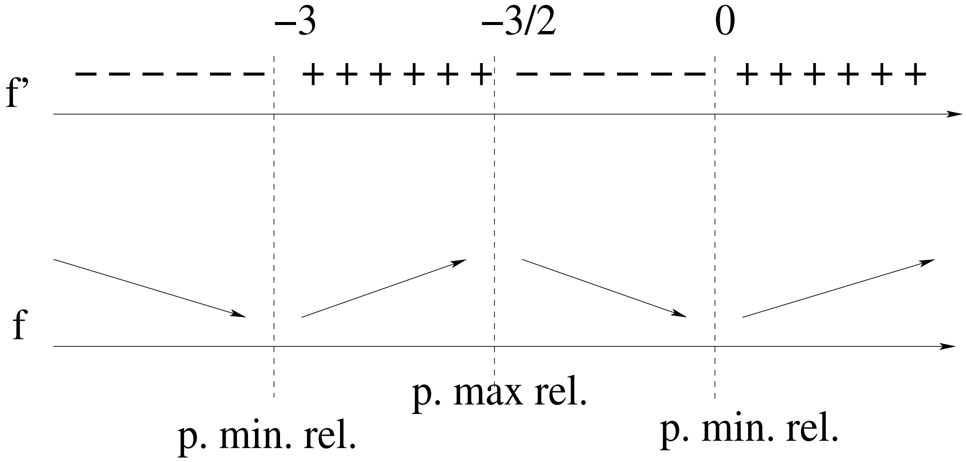
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\ =\ +\infty$$

Studiamo la monotonia della funzione e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo calcolando la derivata prima di f il suo segno e gli eventuali zeri.

$$f'(x)\ =\ 4x^3 + 18x^2 + 18x$$

$$f'(x) = 0 \iff x(4x^2 + 18x + 18)\ =\ 0 \Rightarrow x_{1,2} = \left\{-3; -\frac{3}{2}\right\}.$$

La seguente figura schematizza la situazione relativa a quanto cercato



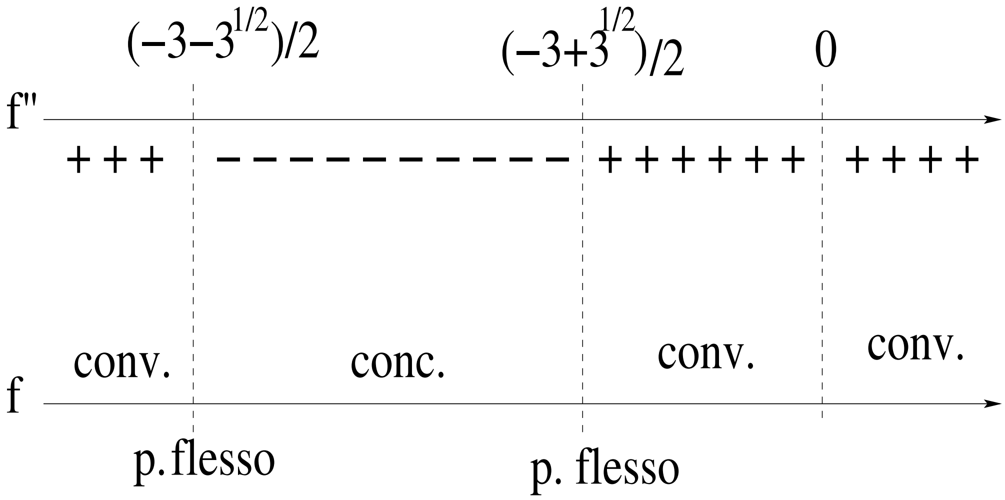
In particolare osserviamo che i punti $x = -3$ e $x = 0$ sono di minimo relativo mentre $x = -\frac{3}{2}$ è di massimo relativo.
Calcoliamo la derivata seconda di f per studiare la convessità.

$$f''(x) = 12x^2 + 36x + 18.$$

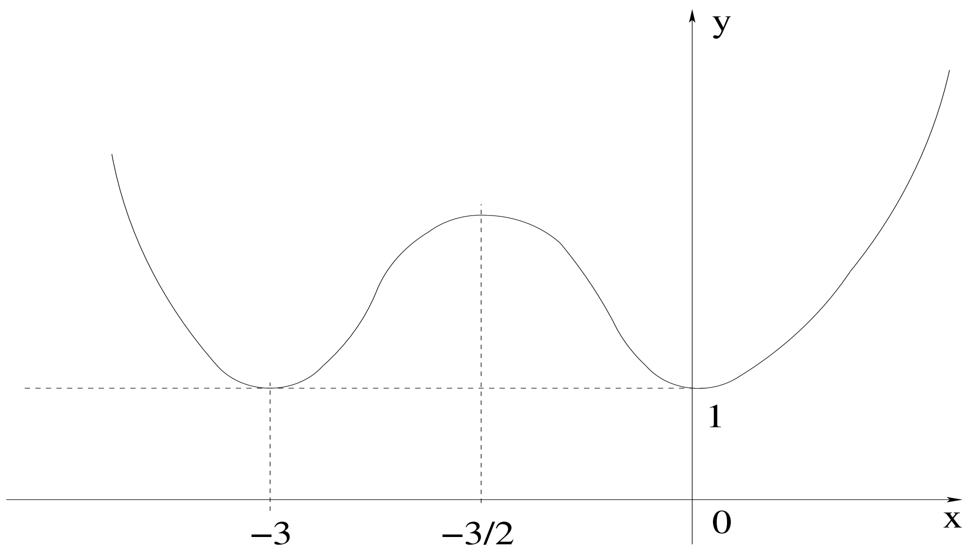
Quindi

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

La seguente figura schematizza la situazione relativa a quanto cercato



In particolare osserviamo che i punti $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$ sono di flesso.
L’andamento della funzione è in definitiva rappresentato dal seguente grafico:



Esercizio 3. (punti 7)
Calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{x}\ \log\left(1 + \sqrt{x}\right) \quad dx.$$

Soluzione. Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \quad \text{quindi} \quad dx \ = \ 2t\,dt.$$

Sostituiamo nell'integrale proposto ed integriamo per parti

$$\int 2\,t^2\ \log(1+t)\ dt \ = \ \frac{2}{3}t^3\ \log(1+t) - \frac{2}{3}\int \frac{t^3}{1+t}\ dt \ =$$
$$= \frac{2}{3}t^3\ \log(1+t) - \frac{2}{3}\int \left[\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right] dt \ =$$

(perché $t^3 = (1+t)(t^2-t+1) - 1$)

$$= \frac{2}{3}t^3\ \log(1+t) - \frac{2}{3}\int (t^2-t+1)\,dt - \int \frac{1}{1+t}\ dt \ =$$
$$= \frac{2}{3}t^3\ \log(1+t) - \frac{2}{9}t^3 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\log(1+t) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tenuto conto della posizione fatta, otteniamo in definitiva

$$\int \sqrt{x}\ \log\left(1 + \sqrt{x}\right) \quad dx \ =$$
$$= \left\{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ \log(1+\sqrt{x}) - \frac{2}{9}\sqrt{x^3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\log(1+\sqrt{x}) + C,\ C \in \mathbb{R}.\right\}$$

Esercizio 4. (punti 6)
Dire se la serie seguente risulta convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{n+2}}.$$

Soluzione.

La serie è a termini positivi. Applichiamo il criteri del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{n+3}} \frac{n^{n+2}}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+1)\ n^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} = +\infty.$$

La serie è divergente.

Esercizio 5. (punti 6)
Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 8\,y'(t) + 15y(t) = 5\ e^{2t}.$$

Soluzione. Calcoliamo le radici del polinomio associato:

$$\lambda^2 - 8\,\lambda + 15\,\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{3; 5\}.$$

Le soluzioni dell'*equazione omogenea* sono:

$$y_0(t) = C_1\, e^{5t} + C_2\, e^{3t}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'*equazione non omogenea* del tipo

$$y_f(t) = A\ e^{2t}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo le derivate prime e seconde di questa funzione

$$y_f'(t) = 2\,A\,e^{2t};\ y_f''(t) = 4\,A\,e^{2t},$$

che sostituite nella (**??**) ci permettono di ottenere $A = \dfrac{5}{3}$.
In definitiva le soluzioni di (**??**) sono

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t) = C_1\, e^{5t} + C_2\, e^{3t} + \frac{5}{3}\, e^{2t}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}.$$