Compito di Analisi Matematica II del 12 giugno 2013

Corso di Laurea in Fisica a. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.
1) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato dai valori di x che rendono maggiore o uguale a zero l'espressione sotto radice e dai valori che rendono diverso da zero il denominatore della frazione. Quindi

$$C.E. = \{x \in R : \ \ x > 4 \text{ oppure } x \le 0\}.$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \ = \ +\infty; \ \ \lim_{x\to 4+} f(x) = +\infty.$$

Valutiamo l'esistenza di asintoti del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-4}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1+\frac{4}{x-4}} - x =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x-4} + o\left(\frac{1}{x-4}\right)\right] - x = 2.$$

Qui sopra abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $t = \frac{1}{x-4}$. Quindi l'asintonto per x che tende a più infinito è

$$y = x + 2.$$

Nello stesso modo per x che tende a meno infinito si ha

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-4}} + x = \lim_{x\to+\infty} (-x)\sqrt{1+\frac{4}{x-4}} + x =$$
$$\lim_{x\to+\infty} (-x)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x-4} + o\left(\frac{1}{x-4}\right)\right] + x = -2.$$

Quindi l'asintonto per x che tende a meno infinito è

$$y = -x - 2.$$

Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli dimonotonia della funzione.

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x}}\,\frac{|x|(x-6)}{(x-4)^2}.$$

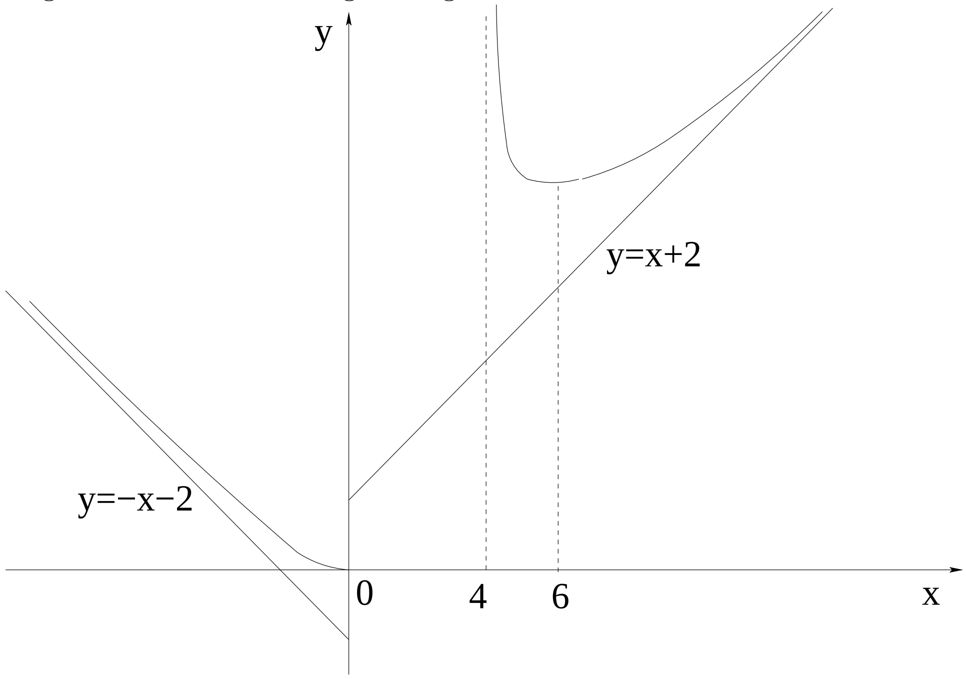
Risulta $f'(x) > 0$ per $x > 6$, $f'(x) < 0$ per $x < 6$. Quindi la funzione è crescente su $(6, +\infty)$ e decrescente su $(4, 6)$ e $(-\infty, 0]$. Il punto $x = 6$ è di minimo relativo e $f(6) = 6\sqrt{3}$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 0.$$

calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavità e convesità di f.

$$f''(x) = \sqrt{\frac{(x-4)^3}{x}}\,\frac{1}{|x-4|^3}\left(|x| - \frac{(x+2)(x-6)}{|x-4|}\right),$$

Osserviamo che $f''(x) > 0$ per $|x||x-4| > (x+2)(x-6)$, che è verificata per ogni valore di x apaprtenente al C. E. di f. Quindi la funzione è convessa su $(-\infty, 0]$ e su $(4, +\infty)$. Siamo ora in grado ti tracciare il seguente grafico.



2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}} \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

a) Stabilire mediante studio a priori se è integrabile secondo Riemann nell'intervallo

$$\left(\frac{1}{2}\,,\ 1\ \right]$$

b) Calcolare

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\ dx.$$

Svolgimento

a) Osserviamo che f risulta continua sull'intervallo considerato, inoltre

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}+} \frac{x-\frac{1}{2}+o(x-\frac{1}{2})}{2|x|\sqrt{x+\frac{1}{2}}\sqrt{x-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Possiamo prolungare f all'intervallo chiuso ponendo

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in (\frac{1}{2}, 1], \\ \\ 0, \text{ se } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

In questo modo otteniamo una funzione continua sull'intervallo chiuso e quindi integrabile su tale intervallo. Di conseguenza anche f è integrabile.

b) Procediamo integrando per parti osservando che

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4x^2-1} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \overline{f}(x)\ dx\ =\ 2\left[\sqrt{4x^2-1}\ \log(x+\frac{1}{2})\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\ -\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4x^2-1}\ \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\ dx =$$

$$= 2\sqrt{3}\ \log\frac{3}{2}\ -\ 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\ dx\ =\ 2\sqrt{3}\ \log\frac{3}{2}\ -\ 4\int_{1}^{2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\ dt\ =$$

$$\left(\text{poniamo } u^2 = \frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\ \log\frac{3}{2}\ -\ 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\ du.$$

Applichiamo la formula di Hermite

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\ =\ \frac{A}{1+u}\ +\ \frac{B}{1-u}\ +\ \frac{d}{dx}\frac{Cu+D}{1-u^2}.$$

Risolvendo otteniamo $A=-1$, $B=-1$, $C=2$, $D=0$. Sostituendo otteniamo

$$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\ du = \sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3}).$$

In definitiva
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \overline{f}(x)\ dx = 2\sqrt{3}(\log 3 - \log 2 - 1) + 2\log(2+\sqrt{3}).$$

3) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x}}{\log(1+\sin x) - \log(1+x)}.$$

Svolgimento.

Sviluppiamo con la formula di Taylor le funzioni che compaiono nell'espressione

$$e^{\sin x} = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = e^{x}\ e^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = e^{x}\left[1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right];$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$
$$\log(1+\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Sostituendo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x}}{\log(1+\sin x) - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{x}\, \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1.$$