Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 1

Dario Trevisan

23/09/2024

Section 1

Introduzione al corso

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)

Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)

- Introdurremo inoltre le basi del linguaggio R.

Materiale didattico

Alla pagina web del corso
http://people.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html

trovate

- **Appunti**

Materiale didattico

Alla pagina web del corso
http://people.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti

Materiale didattico

Alla pagina web del corso
http://people.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti
- Note delle lezioni (slides annotate)

Materiale didattico

Alla pagina web del corso
http://people.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti
- Note delle lezioni (slides annotate)
- Registrazioni

Orario lezioni

- Lunedì 10:30 - 13:30

Orario lezioni

- Lunedì 10:30 - 13:30
- Giovedì 11:30 - 13:30

Ricevimento

Ogni ??? ore 18-20 (su appuntamento, anche su Teams, contattatemi sempre via mail oppure Teams).

Modalità di esame

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.

Modalità di esame

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto).

Modalità di esame

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto).
- Ogni prova scritta superata permette di accedere ad una (e una sola) prova orale: non necessariamente quella immediatamente successiva, **purché nella medesima sessione** (il compitino vale per la sessione invernale).

Section 2

Capitolo 1: probabilità elementare

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**
- stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici

Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**
- stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici
- Introduzione ad **R** ed RStudio.

Cos'è la probabilità?

> *La probabilità misura il grado di fiducia che un soggetto attribuisce alla validità di una affermazione, avendo a disposizione una informazione parziale (che in generale non permette di dedurre la verità o la falsità dell'affermazione).*

Quale soggetto?

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con I, nota e ritenuta vera,

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di A, *sulla base di tutta e sola l'informazione* I, nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di** A **sapendo** I si indica

$$P(A|I).$$

.

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con I, nota e ritenuta vera,
2. una affermazione, che indichiamo con A, che nella realtà può essere solo vera oppure falsa (quindi senza ambiguità),

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di A, *sulla base di tutta e sola l'informazione* I, nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di** A **sapendo** I si indica

$$P(A|I).$$

.

Proprietà elementari

Operazioni logiche tra affermazioni

Monotonia

Date due affermazioni A e B e l'informazione nota I, se A **è vera in qualsiasi situazione in cui** B **sia vera** (supponendo sempre vera I), allora

$$P(B|I) \leq P(A|I).$$

Regola della somma

- Date A, B e l'informazione nota I, se A e B non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo I vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

Regola della somma

- Date A, B e l'informazione nota I, se A e B non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo I vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- A e B si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione I), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

Regola della somma

- Date A, B e l'informazione nota I, se A e B non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo I vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- A e B si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione I), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

- Come calcolare $P(A \text{ oppure } B)$ in generale?

Alternativa semplice

Sistemi di alternative

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione I) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e

Sistemi di alternative

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione I) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.

Sistemi di alternative

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione I) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.

- In breve, **una e una sola** tra le alternative è sicuramente vera (nota I).

Formula di decomposizione

Sia $(A_i)_{i=1}^n$ un sistema di alternative (rispetto all'informazione I) e sia B una (qualsiasi) affermazione.

Allora
$$P(B|I) = P(B \text{ e } A_1|I) + \ldots + P(B \text{ e } A_n|I).$$

Densità discreta

Ad un sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$ (rispetto all'informazione I) possiamo associare la collezione delle probabilità

$$(P(A_i|I))_{i=1}^n.$$

Densità Bernoulli

Densità Uniforme

Moda di una densità discreta

La moda indica l'alternativa **più probabile**, ossia

$$i_{\max} \in \arg\max\{P(A_i|I) : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Regola del prodotto

Date affermazioni A, B e l'informazione nota I, vale

$$P(A \text{ e } B|I) = P(A|I)P(B|A, I).$$

formula di Kolmogorov per la probabilità condizionata:

$$P(B|A, I) = \frac{P(A \text{ e } B|I)}{P(A|I)}.$$

Formula di disintegrazione

Sia $(A_i)_{i=1}^n$ un sistema di alternative rispetto ad una informazione I. Allora, data una affermazione B (qualsiasi),

$$P(B|I) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i, I)P(A_i|I).$$

Notazione “proporzionale”

Data una densità discreta $(p_i)_{i=1}^n$ e una funzione $f(i)$ a valori positivi (non necessariamente $f(i) \leq 1$) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che $p_i = cf(i)$, dove la costante c è data da

$$c = \left(\sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle p_i sia 1.

- Esempio: densità uniforme $p_i \propto 1$

Notazione "proporzionale"

Data una densità discreta $(p_i)_{i=1}^n$ e una funzione $f(i)$ a valori positivi (non necessariamente $f(i) \leq 1$) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che $p_i = cf(i)$, dove la costante c è data da

$$c = \left(\sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle p_i sia 1.

- Esempio: densità uniforme $p_i \propto 1$
- Esercizio: determinare c se $p_i \propto i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Diagrammi ad albero: Generalità

- Le regole di somma e prodotto (e le conseguenti formule di disintegrazione) forniscono stumenti utili per *analizzare* problemi di probabilità elementare, riducendoli a sotto-problemi più semplici tramite l'introduzione (anche ripetuta) di **sistemi di alternative**.

Diagrammi ad albero: Generalità

- Le regole di somma e prodotto (e le conseguenti formule di disintegrazione) forniscono stumenti utili per *analizzare* problemi di probabilità elementare, riducendoli a sotto-problemi più semplici tramite l'introduzione (anche ripetuta) di **sistemi di alternative**.
- È utile rappresentare l'analisi tramite **diagrammi ad albero** costruiti con il seguente algoritmo.

Costruzione dell'albero

- Si introduce un nodo **radice** (informazione iniziale, ad esempio indicata con Ω). Si iterano poi i seguenti passi:

Costruzione dell'albero

- Si introduce un nodo **radice** (informazione iniziale, ad esempio indicata con Ω). Si iterano poi i seguenti passi:

1. si considera un nodo del grafo che sia una "foglia", ossia senza archi uscenti, etichettato da una affermazione B,

Costruzione dell'albero

- Si introduce un nodo **radice** (informazione iniziale, ad esempio indicata con Ω). Si iterano poi i seguenti passi:

1. si considera un nodo del grafo che sia una "foglia", ossia senza archi uscenti, etichettato da una affermazione B,
2. si sceglie un sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$, e si introducono tanti nodi quante le alternative, etichettate appunto da esse,

Costruzione dell'albero

- Si introduce un nodo **radice** (informazione iniziale, ad esempio indicata con Ω). Si iterano poi i seguenti passi:

1. si considera un nodo del grafo che sia una "foglia", ossia senza archi uscenti, etichettato da una affermazione B,
2. si sceglie un sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$, e si introducono tanti nodi quante le alternative, etichettate appunto da esse,
3. si introducono archi uscenti dalla foglia (B) verso il nodo corrispondente a ciascuna alternativa (A_i),

Costruzione dell'albero

- Si introduce un nodo **radice** (informazione iniziale, ad esempio indicata con Ω). Si iterano poi i seguenti passi:

1. si considera un nodo del grafo che sia una "foglia", ossia senza archi uscenti, etichettato da una affermazione B,
2. si sceglie un sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$, e si introducono tanti nodi quante le alternative, etichettate appunto da esse,
3. si introducono archi uscenti dalla foglia (B) verso il nodo corrispondente a ciascuna alternativa (A_i),
4. si pesa ciascun arco introdotto sopra con la probabilità

$$P(A_i|B, I),$$

dove I consiste della congiunzione di tutte le affermazioni nell'unico cammino (orientato) che collega l'informazione iniziale Ω a B.

Calcolo delle probabilità

Supponendo di aver costruito un albero, come calcolare $P(A|\Omega)$?

- Si effettuano ancora una volta i passaggi 1-4 aggiungendo ad ogni foglia l'alternativa semplice (A) (ed eventualmente la sua negazione) e la probabilità condizionata

Note:

Calcolo delle probabilità

Supponendo di aver costruito un albero, come calcolare $P(A|\Omega)$?

- Si effettuano ancora una volta i passaggi 1-4 aggiungendo ad ogni foglia l'alternativa semplice (A) (ed eventualmente la sua negazione) e la probabilità condizionata
- Si calcola il peso di ciascun cammino che porta da una foglia (A) verso la radice, **moltiplicando** le probabilità sugli archi (è una applicazione della regola del prodotto)

Note:

Calcolo delle probabilità

Supponendo di aver costruito un albero, come calcolare $P(A|\Omega)$?

- Si effettuano ancora una volta i passaggi 1-4 aggiungendo ad ogni foglia l'alternativa semplice (A) (ed eventualmente la sua negazione) e la probabilità condizionata
- Si calcola il peso di ciascun cammino che porta da una foglia (A) verso la radice, **moltiplicando** le probabilità sugli archi (è una applicazione della regola del prodotto)
- Si **sommano** i pesi di tutti i cammini così ottenuti (è una applicazione della regola della somma)

Note:

Calcolo delle probabilità

Supponendo di aver costruito un albero, come calcolare $P(A|\Omega)$?

- Si effettuano ancora una volta i passaggi 1-4 aggiungendo ad ogni foglia l'alternativa semplice (A) (ed eventualmente la sua negazione) e la probabilità condizionata
- Si calcola il peso di ciascun cammino che porta da una foglia (A) verso la radice, **moltiplicando** le probabilità sugli archi (è una applicazione della regola del prodotto)
- Si **sommano** i pesi di tutti i cammini così ottenuti (è una applicazione della regola della somma)

Note:

1. se un arco ha probabilità 0 allora i pesi dei cammini che lo percorrono sono 0, non serve contarli.

Calcolo delle probabilità

Supponendo di aver costruito un albero, come calcolare $P(A|\Omega)$?

- Si effettuano ancora una volta i passaggi 1-4 aggiungendo ad ogni foglia l'alternativa semplice (A) (ed eventualmente la sua negazione) e la probabilità condizionata
- Si calcola il peso di ciascun cammino che porta da una foglia (A) verso la radice, **moltiplicando** le probabilità sugli archi (è una applicazione della regola del prodotto)
- Si **sommano** i pesi di tutti i cammini così ottenuti (è una applicazione della regola della somma)

Note:

1. se un arco ha probabilità 0 allora i pesi dei cammini che lo percorrono sono 0, non serve contarli.
2. se è richiesta la probabilità $P(A|I)$ è l'informazione (cumulata) I è un nodo dell'albero, basta considerare solo l'albero con radice I

Estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)

- **Probabilità di estrarre una precisa sequenza ordinata** di $n \leq N$ palline colorate, di cui $r \leq R$ sono rosse e le rimanenti $b \leq B$ sono blu:

$$\frac{R(R-1)\cdot \ldots \cdot (R-r+1)\cdot B(B-1)\cdot \ldots \cdot (B-b+1)}{N(N-1)\cdot \ldots (N-n+1)}.$$

- **Probabilità di estrarre una precisa sequenza ordinata** di $n \leq N$ palline colorate, di cui $r \leq R$ sono rosse e le rimanenti $b \leq B$ sono blu:

$$\frac{R(R-1)\cdot \ldots \cdot (R-r+1)\cdot B(B-1)\cdot \ldots \cdot (B-b+1)}{N(N-1)\cdot \ldots (N-n+1)}.$$

- **Probabilità di estrarre una qualsiasi sequenza ordinata** di $n \leq N$ palline colorate, di cui $r \leq R$ sono rosse e le rimanenti $b \leq B$ sono blu:

$$\frac{\binom{R}{r}\binom{B}{b}}{\binom{N}{n}}.$$