

CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2024/25 - Appello del 2025-06-03

La durata della prova è di 120 minuti. Fornire risposte dettagliate.

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, un processo $M = (M_t)_{t \geq 0}$ è una martingala rispetto ad una probabilità $P(\cdot)$ se e solo, per ogni $A \in \mathcal{F}_0$ con $P(A) > 0$, M è una martingala rispetto alla probabilità condizionata $P(\cdot | A)$.
2. Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano reale e τ un tempo d'arresto. Allora il processo arrestato B^τ è un processo gaussiano se e solo se τ è P -q.c. costante.
3. Se X è un processo di Feller a valori in un compatto $E \subset \mathbb{R}^d$, allora per ogni $t > 0$ esiste un compatto $K_t \subseteq E$, $K_t \neq E$ tale che, per ogni $x \in E$, $P_x(X_t \in K_t) > 0$ (dove P_x indica la probabilità sotto cui $X_0 = x$).
4. Siano $(U_i, V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie tutte indipendenti tra loro con legge uniforme discreta su $\{-1, 0, 1\}$, e si ponga $X_n = \sum_{i=1}^n U_i$, $Y_n = \sum_{i=1}^n V_i$. Allora $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $M_n := f(X_n, Y_n)$ è una martingala se e solo se vale

$$f(x, y) = \frac{f(x+1, y) + f(x, y+1) + f(x-1, y) + f(x, y-1)}{4} \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Una soluzione:

1. Vero. L'integrazione rispetto alla probabilità $Q_A(\cdot) = P(\cdot | A)$ è data da

$$E_{Q_A}[X] = \frac{1}{P(A)} E_P[X | 1_A],$$

dove E_P indica l'attesa rispetto a P . Chiaramente $X \in L^1(P)$ se e solo se $X \in L^1(Q_A)$ per ogni A di probabilità positiva, in effetti basta considerare $A = \Omega$. La proprietà di martingala rispetto a Q è

$$0 = E_{Q_A}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{P(A)} E_P[M_t - M_s | \sigma(A, \mathcal{F}_s)],$$

che si riduce a quella rispetto a P per $A = \Omega$ ed è implicata dalla proprietà di martingala rispetto a P per la regola della torre.

2. Vero. Se τ è costante $X_t = B_t^\tau = B_{t \wedge \tau}$ è definitivamente costante (in legge) e dunque una implicazione è banale. Inoltre, la martingala $X_t = \int_0^t 1_{s \leq \tau} dB_s$ ha variazione quadratica $\langle X \rangle_t = t \wedge \tau$, che deve essere deterministica se X_t è Gaussiana.

3. Falso. Basta considerare una catena di Markov a stati finiti non irriducibile. (Anche l'esempio banale $E = \{x\}$ va pure bene).

4. Falso. Vale infatti

$$E[f(X_n, Y_n) | \mathcal{F}_{n-1}] = \bar{f}_9(X_{n-1}, Y_{n-1})$$

dove la media $\bar{f}_9$ è sui 9 valori $(x, y) + \{(0, -1, 1)\} \times \{(0, -1, 1)\}$. Notiamo inoltre che per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ esiste n abbastanza grande per cui $(X_{n-1}, Y_{n-1}) = (x, y)$ con probabilità non trascurabile, quindi la condizione

$$f(x, y) = \bar{f}_9(x, y)$$

è equivalente al fatto che $f(X_n, Y_n)$ sia martingala. Chiaramente questa condizione diversa da quella nel testo, che si potrebbe riassumere come $f(x, y) = \bar{f}_5(x, y)$, dove la media è fatta sui 5 valori $\{(x, y), (x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+2)\}$. In effetti a questo punto andrebbe fornito un esempio esplicito di una funzione f che soddisfi la condizione del testo ma non questa (o viceversa). A tale scopo ricordiamo che la funzione $(x, y) \mapsto e^x \sin(y)$ è armonica su $\mathbb{R}^2$ e ne cerchiamo una analoga discreta, ad esempio che soddisfi $f = \bar{f}_5$ ma non $f = \bar{f}_8$. Poniamo allora

$$f(x, y) = k^x \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 2m, m \in \mathbb{Z} \\ k^x & \text{se } y = 4m + 1, m \in \mathbb{Z} \\ -k^x & \text{se } y = 4m + 3, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

per un opportuno k da determinare. Osserviamo che vale banalmente $f(x, y) = \bar{f}_5(x, y)$ se $y = 2m$. Imponendo $f(x, y) = \bar{f}_5(x, y)$ se $y = 4m + 1$, troviamo la condizione, per ogni $x \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{k^{x-1} + k^{x+1}}{4} = k^x$$

da cui $k^{-1} + k = 4$, ossia $k = 2 \pm \sqrt{3}$. La stessa condizione si trova imponendo $f = \bar{f}_5$ nei punti $y = 4m + 3$. Imponendo invece $f = \bar{f}_9(x, y)$ si troverebbe $(k^{x-1} + k^{x+1}) = 8$, ossia $k^{-1} + k = 8$, quindi $k = 4 \pm \sqrt{15}$.

Problema 2

Sia $B = (B_t^1, B_t^2)_{t \geq 0}$ un moto browniano a valori in $\mathbb{R}^2$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

una matrice di parametri (deterministica). Si consideri l'equazione differenziale stocastica a valori in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} dX_t = (X_t, 1)AdB_t \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Al variare di $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

1. Dire se le condizioni di esistenza e unicità viste nel corso sono soddisfatte: dire in particolare se esistono soluzioni forti, vale unicità in legge, e il processo soluzione è di Markov.

2. Dire se esiste il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ in L^2 .
3. Dire se il processo X è una martingala (vera).
4. Dire se il processo X è gaussiano.
5. (*facoltativo*) Dire se B è adattato alla filtrazione di X (completata con gli insiemi trascurabili).

Una soluzione:

Assumiamo senza perdita di generalità $x_0 \geq 0$ (altrimenti basta considerare $-X_t$). L'equazione si riscrive come

$$dX_t = X_t d(aB^1 + bB^2) + d(cB^1 + dB^2).$$

Se $a = b = 0$, X_t è un multiplo (possibilmente nullo) del moto Browniano: l'equazione è banalmente ben posta in senso forte, la soluzione è un processo di Markov, Gaussiano, una martingala, non converge a un limite finito per tempi grandi.

Supponiamo d'ora in avanti $\alpha^2 := a^2 + b^2 > 0$. Definiamo

$$W_t = \frac{aB_t^1 + bB_t^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tilde{W}_t = \frac{-bB_t^1 + aB_t^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

che sono due moti Browniani standard indipendenti, e riscriviamo:

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta) dW_t + \gamma d\tilde{W}_t, \quad \gamma = \frac{ad - bc}{\alpha}, \quad \beta = \frac{ac + bd}{\alpha}.$$

Si verifica con la formula di Itô (ad esempio calcolando $\int_0^t X_t dW_t$ per parti) che la soluzione deve verificare, quasi certamente per ogni tempo,

$$X_t = e^{\alpha W_t - \alpha^2 t/2} x_0 + e^{\alpha W_t - \alpha^2 t/2} \int_0^t e^{-\alpha W_s + \alpha^2 s/2} (\beta dW_s + \gamma d\tilde{W}_s - \alpha \beta ds).$$

Possiamo quindi rispondere ai quesiti.

1. La rappresentazione esplicita mostra che esiste una soluzione forte, unica in legge e per traiettorie. La proprietà di Markov si può ottenere dalla formula esplicita (usandola per esprimere X_t a partire da X_s al tempo s si mostra che X_t è indipendente da $\mathcal{F}_s$ condizionalmente a X_s) ma anche dal teorema visto a lezione sulle equazioni con coefficienti regolari (anche se lì abbiamo solo considerato per semplicità coefficienti limitati).

2. Il processo X_t è una martingala locale con variazione quadratica

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t (\alpha X_s + \beta)^2 ds + \gamma^2 t.$$

e dalla formula esplicita o da quanto visto nel corso si vede che X_t ha tutti i momenti finiti (usando opportunamente Hölder e l'isometria di Itô), quindi è una martingala vera.

3. Applicando la formula di Itô a X_t^2 si calcola esplicitamente

$$E[X_t^2] = E \left[\int_0^t (\alpha X_t + \beta)^2 dt \right] + \gamma^2 t, \quad E[X_t^2] = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta x_0}{\alpha^2} (e^{\alpha^2 t} - 1),$$

la seconda differenziando la prima in t e risolvendo la ODE così ottenuta. Segue quindi che non c'è mai convergenza in L^2 per $t \rightarrow \infty$

4. Se X_t è Gaussiano la variazione quadratica deve essere deterministica, ma questo è possibile solo se l'integranda (non-negativa) dell'ultima formula è deterministica, il che equivale a dire che X_t ha varianza nulla per ogni tempo, il che contraddice la formula di cui sopra. In generale dunque X_t è Gaussiano se e solo se $\alpha = 0$, ovvero $a_{11} = a_{12} = 0$.