CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2024/25 - Appello del 2025-06-24

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Date $X_1, X_2, \dots \in L^1(P)$ variabili i.i.d. e posto $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, vale
$$E[X_1 \mid \sigma(S_m,\, m \geq n)] = \frac{1}{n} S_n, \quad P\text{-quasi certamente.}$$
2. Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale, per ogni $p > 0$ e $c \geq 1$ il processo $t^{-p} e^{B_t - ct}$ converge a 0 in $L^2(P)$.
3. Date X_t, Y_t, $t \geq 0$ due martingale locali continue con $X_0 = Y_0 = 0$, se la loro covariazione $\langle X, Y \rangle_t$ è identicamente nulla per ogni t allora esse sono indipendenti.
4. Se X_t, $t \geq 0$ il processo di Ornstein-Uhlenbeck definito da $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + dB_t$ e $X_0 = 0$,
$$M_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X_t} e^{-s^2/2} ds$$
è una martingala locale continua.

Una soluzione:

1. Vero. Si ha che $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ è indipendente da $\sigma(X_1, S_n) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_n)$, per cui
$$E[X_1 \mid \sigma(S_m,\, m \geq n)] = E[X_1 \mid S_n].$$

Per simmetria deve valere

$$E[X_1 \mid S_n] = E[X_2 \mid S_n] = \dots = E[X_n \mid S_n],$$

(rigorosamente basta esplicitare

$$E[X_1 1_{S_n \in A}] = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_1 1_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n),$$

dove μ è la legge di una singola X_i, e cambiare di variabile $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$), per cui quasi certamente

$$S_n = E[S_n \mid S_n] = E[X_1 + \cdots X_n \mid S_n] = nE[X_1 \mid S_n].$$

2. Vero. Basta calcolare

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{\mathbb{E}\left[e^{B_t}\right]}{t^p e^{ct}} = \frac{e^{t/2}}{t^p e^{ct}} = \frac{1}{e^{(c-\frac{1}{2})t}} \frac{1}{t^p},$$
$$\operatorname{Var}[X_t] = \frac{\operatorname{Var}\left[e^{B_t}\right]}{t^{2p} e^{2ct}} = \frac{e^{2t} - e^t}{t^{2p} e^{2ct}} = \frac{1}{t^{2p}} \left(\frac{1}{e^{2t(c-1)}} - \frac{1}{e^{t(2c-1)}} \right),$$

e osservare che per $t \to \infty$ ambedue tendono a 0.

3. Falso. Preso un moto Browniano reale B_t e un tempo d'arresto τ non banale (ad esempio, l'hitting time di 1) poniamo

$$X_t = B_{\tau\wedge t} = \int_0^t 1_{s\le\tau} dB_s, \quad Y_t = B_t - B_{t\wedge\tau} = \int_0^t 1_{s>\tau} dB_s,$$

che sono due martingale locali con covariazione quadratica nulla. La proprietà forte di Markov dice che *condizionalmente* a $\mathcal{F}_\tau$ i due processi sono indipendenti, ma essi *non* sono in generale indipendenti. Ad esempio non sono indipendenti gli eventi

$$\left\{ \sup_{t\in[0,1]} |X_t| > 0 \right\} = \{\tau > 0\}, \quad \left\{ \sup_{t\in[0,1]} |Y_t| > 0 \right\} = \{\tau < 1\}.$$

4. Vero. Dalla formula di Itô si ha

$$df(X_t) = \tfrac{1}{2} X_t f'(X_t)dt + f'(X_t)dB_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)dt,$$

da cui si ha che $f(X_t)$ è una martingala locale se e solo se f soddisfa l'equazione differenziale $xf' + f'' = 0$ (perchè la legge di X_t ha supporto $\mathbb{R}$ per ogni tempo $t > 0$). La funzione di ripartizione della Gaussiana standard

$$f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds$$

soddisfa l'equazione trovata, ed inoltre è limitata quindi $f(X_t)$ è una vera martingala.

Problema 2

Sia $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ uno spazio di probabilità filtrato soddisfacente le ipotesi standard, W_t un moto Browniano standard. Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \alpha(t)X_t dt + \beta(t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R},$$

dove α, β sono funzioni misurabili e limitate su $[0, \infty)$.

1. Mostrare che esiste una soluzione debole. Dire se in generale esiste una soluzione forte e (se e) quali nozioni di unicità delle soluzioni valgono. Si dica se (in generale) le soluzioni soddisfano la proprietà di Markov, se hanno legge Gaussiana, se sono martingale.
2. Si mostri che una soluzione dell'equazione deve soddisfare:

$$E[X_t] = e^{A(t)}x, \qquad \mathrm{Var}[X_t] = e^{2A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} \beta^2(s) ds,$$

   con $A(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$.
3. Si supponga inoltre esista $\beta_0 > 0$ tale che $\beta(t) \ge \beta_0 > 0$ per ogni $t > 0$, e ci si restringa a un intervallo di tempo limitato $t \in [0, T]$. Si consideri il processo

$$Y_t = \int_0^t \beta(s) dW_s.$$

Dire se la legge P_X della soluzione dell'equazione differenziale stocastica con dato iniziale $x = 0$ è assolutamente continua rispetto a quella del processo Y.

Una soluzione:

1. L'equzione è lineare e la soluzione ammette la rappresentazione esplicita:

$$X_t = e^{A(t)}x + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)dW_s.$$

Come osservato a lezione, di conseguenza esiste una soluzione forte, unica *pathwise.* Inoltre, prendendo il valore atteso si ha che $E[X_t] = e^{A(t)}x$ come chiesto al secondo punto. Questo a sua volta implica che X_t non è una martingala a meno che $A(t) \equiv 0$, ovvero $\alpha(t) \equiv 0$. La soluzione X_t ha legge Gaussiana perché è Gaussiano il processo $Z_t = e^{-A(t)}X_t - x$ che coincide con un integrale stocastico con integranda deterministica. Infine, la soluzione soddisfa la proprietà di Markov rispetto alla filtrazione Browniana perché:

$$\begin{aligned} E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] &= E\left[f(e^{A(t)}x + e^{A(t)}(Z_t - Z_s + Z_s)) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[f(e^{A(t)}x + e^{A(t)}(Z_t - Z_s + z))\right]\Big|_{z=Z_s}. \end{aligned}$$

2. Per il momento secondo, calcoliamo:

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= \beta^2(t)dt, \\ d\left(X_t^2\right) &= 2X_t dX_t + (dX_t)^2 = 2X_t\left(\alpha(t)X_t dt + \beta(t)dW_t\right) + \beta^2(t)dt \\ &= \left(2\alpha(t)X_t^2 + \beta^2(t)\right)dt + 2\beta(t)X_t dW_t \end{aligned}$$

Dalla seconda si deriva una SDE per $Y_t = X_t^2$,

$$dY_t = \left(2\alpha(t)Y_t + \beta^2(t)\right)dt + 2\beta(t)\sqrt{Y_t}dW_t,$$

da cui si ottiene una equazione integrale per l'attesa

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \int_0^t 2\alpha(s)E[Y_s]ds + \int_0^t \beta^2(s)ds,$$

e risolvendo in $u(t) = E[Y_t] = E[X_t^2]$ la ODE lineare

$$u' = 2\alpha u + \beta^2$$

si conclude che

$$E\left[X_t^2\right] = e^{2A(t)}\left(X_0^2 + \int_0^t e^{-2A(s)}\beta^2(s)ds\right).$$

La varianza è data da:

$$\mathrm{Var}\left[X_t\right] = E\left[X_t^2\right] - E\left[X_t\right]^2 = e^{2A(t)}\int_0^t e^{-2A(s)}\beta^2(s)ds.$$

3. Osserviamo che il processo Y è una martingala continua nulla in zero e pure un processo Gaussiano con variazione quadratica $\langle Y, Y \rangle_t = \int_0^t \beta(s)^2 ds$. Argomentando come nel caso del teorema di Levy per il moto browniano, una qualsiasi martingala locale continua nulla in zero con la stessa variazione quadratica ha la stessa legge di Y. La SDE per X_t si può riscrivere come

$$dX_t = \alpha(t) X_t dt + dY_t.$$

Ripetiamo quindi il ragionamento che permette di mostrare esistenza di soluzioni deboli come conseguenza di Girsanov. Consideriamo lo spazio di Wiener munito della misura P_Y e della filtrazione canonica e scriviamo $Z_t(\omega) = \omega_t$ per il processo canonico, che ha la stessa legge di Y sotto P_Y. Poniamo $L_t(w) = \int_0^t \beta^{-2}(t)\alpha(t) Z_t dZ_t$, in modo che $d\langle L, Z \rangle_t = \alpha(t) Z_t dt$, e pertanto, sotto la misura $Q = \mathcal{E}(L) P_Y$, per il teorema di Girsanov, si ha che $\tilde{Z}_t = Z_t - \langle L, Z \rangle_t$ è una martingala locale continua (nulla in zero) con la stessa variazione quadratica di Z, quindi in particolare ha la stessa legge di Y. Inoltre sappiamo che Q-quasi certamente

$$\langle L, Z \rangle_t = \left\langle L, \tilde{Z} \right\rangle_t$$

e si trova quindi Z (sotto Q) soddisfa l'equazione differenziale stocastica

$$dZ = \alpha(t) Z_t dt + d\tilde{Z}_t.$$

Poiché $\tilde{Z}$ ha la stessa legge di Y, per unicità in legge ne segue che Z ha la stessa legge di X e quindi $P_X = Q$ è assolutamente continua, con densità $\mathcal{E}(L)_T$ (su ogni intervallo di tempi limitato $[0, T]$).