CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2024/25 - Appello del 2025-07-15

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Se $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, e X_t risolve
$$dX_t = -f(X_t)dt + dB_t, \quad X_0 = 0,$$
allora $M_t = \exp\left(f(X_t) + \frac{1}{2}\int_0^t (f'(X_s)^2 - f''(X_s))ds\right)$ è una martingala locale continua.
2. Se B_t è un moto Browniano standard, per ogni tempo $t \geq 0$, quasi certamente vale
$$\int_0^t \cos(B_s)dB_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B_t^{2n+1}.$$
3. Se B_t è un moto Browniano standard e $\mathcal{F}_t$ è la sua filtrazione naturale, $M_t = \int_0^t B_s ds$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala.
4. Una martingala a tempo discreto X_n, $n \in \mathbb{N}$ è sempre anche un processo di Markov.

Una soluzione:

1. Falso (sarebbe vero se fosse $f'(X_t)$ e non $f(X_t)$ nell'equazione risolta da X). Ad esempio se $f(x) = x$, si ha che X_t è un processo di Ornstein-Uhlenbeck, esplicitamente:
$$X_t = e^{-t}\int_0^t e^s dB_s.$$
Si trova allora per Ito
$$dM_t = M(-Xdt + dB + dt)$$
che non è una martingala locale, visto che $-X \neq 1$ e quindi il termine a variazione finita non è nullo.

2. Falso. Infatti il membro di destra è la serie di Taylor del seno, quindi vale $\sin(B_t)$. Tuttavia se l'identità fosse vera avremmo che $d\sin(B_t) = \cos(B_t)dB_t$ ma per la formula di Itô vale in realtà $d\sin(B_t) = \cos(B_t)dB_t - \frac{1}{2}\sin(B_t)dt$.

3. Falso. Basta calcolare
$$E[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = E\left[\int_s^t B_r dr \mid \mathcal{F}_s\right]$$
$$= E\left[\int_s^t (B_r - B_s)dr + (t-s)B_s \mid \mathcal{F}_s\right] = (t-s)B_s$$

4. Falso. Ad esempio si consideri la trasformata martingala

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}). \tag{1}$$

dove X_n è la martingala somma e $H_n = Y_0$ da $n = 1$ in poi. Questa è una martingala per costruzione, ma $E[f(Y_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = F(Y_n, Y_0)$ dipende sempre anche da Y_0.

Problema 2

Sia $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ uno spazio di probabilità filtrato soddisfacente le ipotesi abituali e B_t un moto Browniano reale su di esso definito. Al variare di $x \in [0, 1]$, consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dB_t, \quad X_0 = x,$$

dove b, σ sono funzioni Lipschitz su $\mathbb{R}$.

1. Dire se si applicano le ipotesi di buona positura viste nel corso, in particolare se vi sono soluzioni forti e vale l'unicità in legge.
2. Dati $x, y \in [0, 1]$ mostrare che vale, per ogni $t \geq 0$, quasi certamente,

$$X_t^x - X_t^y = (x - y) \exp\left(\int_0^t \phi_s dB_s + \int_0^t (\psi_s - \tfrac{1}{2}\phi_s^2) ds\right),$$

dove

$$\psi_t = \frac{b(X_t^x) - b(X_t^y)}{X_t^x - X_t^y} 1_{X_t^x \neq X_t^y}, \quad \phi_t = \frac{\sigma(X_t^x) - \sigma(X_t^y)}{X_t^x - X_t^y} 1_{X_t^x \neq X_t^y}.$$

3. Con la notazione del punto precedente, per ogni $p \geq 1$ si mostri che $M_t = \mathcal{E}\left(p \int_0^t \phi_s dB_s\right)$ è una vera martingala, e si deduca che

$$E[|X_t^x - X_t^y|^p] \leq |x - y|^p e^{Cpt}, \quad t \geq 0,$$

con C una costante positiva.

4. Mostrare che per ciascun $t > 0$ fissato, il processo (indicizzato da $x \in [0, 1]$) $(X_t^x)_{x \in [0,1]}$ ha una modificazione Hölder continua nel dato iniziale (di quale esponente?).

Una soluzione:

1. Si applicano: vale unicità in legge e per ogni x le soluzioni sono forti.
2. Posto

$$V_t = \exp\left\{-\int_0^t \phi_u dB_u + \int_0^t \left(\frac{\phi_u^2}{2} - \psi_u\right) du\right\}$$

dalla formula di Itô applicata all'esponenziale si ha

$$dV_t = V_t\left(\phi_t^2 - \psi_t\right) dt - V_t \phi_t dB_t$$

Posto $W = X^x - X^y$, dall'equazione differenziale di partenza si ha

$$\begin{aligned} dW_t &= \left(b\left(X_t^x\right) - b\left(X_t^y\right)\right) dt + \left(\sigma\left(X_t^x\right) - \sigma\left(X_t^y\right)\right) dB_t \\ &= W_t\left(\psi_t dt + \phi_t dB_t\right) \end{aligned}$$

in cui il secondo passaggio usa il fatto che $W_t\psi_t = b\left(X_t^x\right) - b\left(X_t^y\right)$ e $W_t\phi_t = \sigma\left(X_t^x\right) - \sigma\left(X_t^y\right)$. Applichiamo ora la formula di Itô di integrazione per parti ottenendo

$$\begin{aligned} d\left(V_t W_t\right) &= W_t dV_t + V_t dW_t + d\langle V, W\rangle_t \\ &= V_t W_t\left(\phi_t^2 dt - \psi_t dt - \phi_t dB_t\right) + V_t W_t\left(\psi_t dt + \phi_t dB_t\right) - V_t W_t \phi_t^2 dt = 0 \end{aligned}$$

da cui abbiamo che VW è una costante, uguale a $V_0 W_0 = x - y$, e questa è la tesi.

3. Poiché b, σ sono entrambe K-Lipschitz per $0 < K < \infty$ abbastanza grande, ϕ, ψ sono limitate da K. Si applica allora il criterio di Novikov e M_t è una vera martingala. Dal punto 1. deduciamo

$$\begin{aligned} \left|X_t^x - X_t^y\right|^p &= |x-y|^p M_t \exp\left\{p\int_0^t \psi_u du + \frac{p^2 - p}{2}\int_0^t \phi_u^2 du\right\} \\ &\leq |x-y|^p M_t \exp\left\{pKt + \frac{p^2-p}{2}K^2 t\right\}, \end{aligned}$$

da cui prendendo l'attesa si ottiene la tesi.

4. La tesi è diretta conseguenza del criterio di continuità di Kolmogorov, che a p fissato restituisce esponente $1 - 1/p$, qunndi sono Hölder continue per ogni esponente < 1.