CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2024/25 - Appello del 2025-09-09

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Un processo $(X_n)_{n\geq 0}$ integrabile e adattato a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ è una supermartingala rispetto a tale filtrazione se e solo se è della forma $X_n = M_n + D_n$ dove $(M_n)_{n\geq 0}$ è una martingala e $(D_n)_{n\geq 0}$ è un processo a traiettorie decrescenti.
2. Per ogni $d \geq 1$, un processo stocastico $(B_t)_{t\geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ è un moto Browniano d-dimensionale se e solo se, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ tale che $\langle v, v\rangle = 1$, il processo a valori reali $(\langle v, B_t\rangle)_{t\geq 0}$ è un moto Browniano reale (dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare Euclideo).
3. Se $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sono processi di Feller a valori reali e indipendenti, allora il processo $Z_t := (X_t, Y_t)$ è un processo di Feller a valori in $\mathbb{R}^2$.
4. L'unico processo a valori reali che è contemporaneamente una martingala continua, un processo di Markov e un processo gaussiano è il moto browniano.

Una soluzione:

1. Vera. Infatti per un processo della forma $X_n = M_n + D_n$ notiamo che anche D_n deve essere adattato e integrabile (per differenza) e vale

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] + E[D_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq M_n + D_n = X_n.$$

Viceversa, se X_n è una supermartingala, definiamo ricorsivamente

$$D_n = D_{n-1} + E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$$

e per differenza $M_n := X_n - D_n$. Si verifica che D_n è decrescente e M_n è una martingala.

2. Vero. Si può ad esempio usa usare il criterio di Paul Levy. Osserviamo che la variazione quadratica di $\langle v, B\rangle$ è

$$[\langle v, B\rangle]_t = \sum_{i,j=1^d} v_i v_j [B_i, B_j]_t$$

e poiché sappiamo che $\sum_i v_i^2 = 1$ ne segue che $[B_i, B_j] = 0$ se $i \neq j$.

3. Vero. È di Feller con operatore di transizione $P_t f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u, v) p_t^X(x, du) p_t^Y(y, dv)$, dove p^X, p^Y indicano le funzioni di transizione di X e Y.

4. Falso, il processo $B_t = 0$ per ogni t soddisfa tutte le proprietà richieste.

Problema 2

Dato $x_0 \in (-1, 1)$, e consideri l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t &= \sqrt{(1-X_t^2)^+} dB_t - \frac{1}{2} X_t dt \quad \text{for } t > 0, \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

dove $(B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale e $z^+ := \max\{0, z\}$. Si ponga inoltre

$$\tau = \tau_X := \inf\{t \geq 0 \, : \, |X_t| = 1\}.$$

1. Dire se le ipotesi di buona positura viste nel corso (tipo Cauchy-Lipschitz) sono soddisfatte per l'equazione data.
2. Mostrare che per vale unicità delle soluzioni per traiettorie fino a τ, ossia se $(X_t)_{t\geq 0}$, $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$, sono soluzioni definite sullo stesso spazio (rispetto allo stesso moto Browniano), allora P-q.c. vale $\tau = \tau_X = \tau_{\tilde{X}}$ e $X_t = \tilde{X}_t$ per ogni $t < \tau$.
3. Mostrare che $X_t = \sin(B_t + \arcsin(x_0))$ risolve P-q.c. l'equazione per ogni $t < \tau$.
4. Per la soluzione trovata al punto sopra, calcolare $P(X_\tau = 1)$ in funzione di x_0.

Una soluzione:

1. Le ipotesi non sono soddisfatte, perché la fuzione $x \mapsto \sqrt{(1-x^2)^+}$ non è Lipschitz (è solamente Hölder continua). Pertanto non possiamo utilizzare il risultato di buona positura visto nel corso (in realtà esiste un risultato dovuto a Yamada-Watanabe che garantisce anche in questo caso unicità per traiettorie, ma non è richiesto per il problema).

2. Dato $\varepsilon > 0$, consideriamo i tempi

$$\tau_X^\varepsilon := \inf\left\{t \geq 0 \, : \, 1 - |X_t|^2 \leq \varepsilon\right\}$$

e similmente $\tau_{\tilde{X}}^\varepsilon$. Supponendo che $|x_0| < 1 - \varepsilon$, abbiamo che per $t < \tau_X^\varepsilon$, X_t risolve l'equazione

$$dX_t = \sqrt{\max\left\{\varepsilon, 1 - X_t^2\right\}} dB_t - \frac{1}{2} X_t dt,$$

e similmente $\tilde{X}_t$, con lo stesso dato iniziale e moto Browniano. Questa equazione ha però coefficienti Lipschitz e quindi vale unicità per traiettorie. Ne segue che $\tau_X^\varepsilon = \tau_{\tilde{X}}^\varepsilon$ e $\tilde{X}_t = X_t$ per $t < \tau_X^\varepsilon$. Per $\varepsilon \to 0$ segue la tesi .

3. Applicando la formula di Itô si trova che

$$dX_t = \cos(B_t + \arcsin(x_0)) dB_t - \frac{1}{2} \sin(B_t + \arcsin(x_0)) dt.$$

Per $t < \tau$ abbiamo che $B_t + \arcsin(x_0) \in (-\pi/2, \pi/2)$, quindi $\cos(B_t + \arcsin(x_0)) > 0$, e quindi $\cos(B_t + \arcsin(x_0)) = \sqrt{1 - X_t^2}$ e l'equazione è quindi soddisfatta.

4. Possiamo riscrivere

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \, : \, |B_t + \arcsin(x_0)| = \frac{\pi}{2}\right\}$$

e quindi ci riconduciamo al solito "problema della rovina", dove il giocatore ha inizialmente un capitale 0 e gioca fino a raggiungere la "vittoria" a quota $a := \pi/2 - \arcsin(x_0)$ o la sconfitta a quota $-b := -\pi/2 - \arcsin(x_0)$. Per quanto visto nel corso si ha la probabilità di vittoria pari a $b/(a+b)$, che coincide con la probabilità dell'evento cercato:

$$P(X_\tau = 1) = \frac{\pi/2 - \arcsin(x_0)}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\arcsin(x_0)}{\pi}.$$