Esercizio 1. *Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = B_1 \cup \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (B) $\Omega_B = \overline{B}_1 \setminus \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1 \cap \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \cup \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$;

(E) $\Omega_E = B_1 \cap \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (F) $\Omega_F = \Big([0,2) \times [0,2)\Big) \setminus B_1$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cap \Big\{(x,y) \ : \ x \geq 0\Big\} \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y = 0\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione* $\dfrac{e^{\sin(y-x^2)}}{\cos(2x+y^2)}$.

$\dfrac{e^{\sin(y+x^2)}}{\cos(2x-y^2)} =$

Esercizio 4. *Dati* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t)\,,\ \sqrt{1+4t} - \sqrt{1-3t}\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^y}{\sqrt{1-xy}}$ *, calcolare*

$\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H di $F(x,y) = \dfrac{3\cos(xy) - 2\cos(x+y)}{1-y}$ nel punto $(0,0)$. Dire se H è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* definita positiva ✓

$\det(H) = 8 - 4 = 4 > 0$

$\mathrm{tr}(H) > 0$

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione $F(x,y) = \frac{1}{2+x^2+y^2}$ sulla palla B_1.*

$\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy = \pi \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ✓

Esercizio 7. *Siano $\alpha = (e^x - y^8)\,dx + (e^{-y} + 2x)\,dy$ e γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del quadrato $[0,1]\times[0,1]$ in senso antiorario. Calcolare* $\int_\gamma \alpha = 3$ ✓

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*