

Istituzioni di Analisi Matematica

Esame scritto

17 febbraio 2026

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch
(né di altri dispositivi connessi),
né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Esercizio 1. Sia $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ un operatore lineare, continuo e autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(0, 1)$. Mostrare che se $T^2 : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ è compatto, allora anche T è compatto.

Esercizio 2. Sia $u_n \in W^{1,2}(0, 1)$ una successione di funzioni non-negative che converge debolmente in $W^{1,2}(0, 1)$ a $u \in W^{1,2}(0, 1)$.

- (a) Mostrare che u_n^2 converge debolmente in $W^{1,2}(0, 1)$ a u^2 .
- (b) È vero che $|u_n|$ converge debolmente in $W^{1,2}(0, 1)$ a $|u|$?
- (c) È vero che $\sqrt{|u_n|}$ converge debolmente in $W^{1,2}(0, 1)$ a $\sqrt{|u|}$?

Esercizio 3. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$.

- (a) Siano $1 < p < q < +\infty$ ed u_n una successione in $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ tale che:
 - esiste una funzione $u \in L^p(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$;
 - la successione u_n è limitata in $L^q(\Omega)$.

Mostrare che per ogni $r \in (p, q)$, $u \in L^r(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ in $L^r(\Omega)$.

- (b) Mostrare che se Ω è limitato, allora il funzionale

$$F(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} u^4(x) dx\right)^{1/2}},$$

ammette un minimo fra tutte le funzioni $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$.
