

Istituzioni di Analisi Matematica

Esame scritto

26 giugno 2026

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch
(né di altri dispositivi connessi),
né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Exercise 1. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Sia $f_n \in L^4(\Omega)$ una successione che converge debolmente in $L^4(\Omega)$. È vero che f_n^2 converge debolmente in $L^2(\Omega)$?

Exercise 2. Consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ con prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x) dx.$$

Sia $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore lineare continuo su $\mathcal{H}$.

(1) Mostrare che esiste un operatore lineare continuo

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

tale che

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Sv \rangle \quad \text{per ogni } u, v \in \mathcal{H}.$$

(2) Mostrare che se T è compatto, allora anche S è compatto.

Exercise 3. Sia B_1 la palla unitaria in $\mathbb{R}^d$.

(1) Mostrare che esiste una costante dimensionale C tale che

$$\int_{B_1} u^2 \leq C \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 + \int_{\partial B_1} u^2 \right) \quad \text{per ogni } u \in H^1(B_1).$$

(2) Per $f \in L^2(B_1)$ consideriamo il funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} u^2 dx - \int_{B_1} f(x)u(x) dx,$$

definito per tutte le funzioni $u \in H^1(B_1)$. Mostrare che esiste un minimo di J_f in $H^1(B_1)$.
