

Istituzioni di Analisi Matematica

Esame scritto

5 giugno 2026

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch
(né di altri dispositivi connessi),
né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Exercise 1. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Sia $f_n \in L^3(\Omega)$ una successione che converge debolmente a f in $L^3(\Omega)$. Mostrare che se Ω è limitato, allora f_n converge a f debolmente in $L^2(\Omega)$. Che cosa succede quando $\Omega = \mathbb{R}^d$?

Exercise 2. Per $f \in L^2(0, 1)$ consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (u'(x))^4 dx - \int_0^1 f(x)u^3(x) dx,$$

definito per tutte le funzioni $u \in W_0^{1,4}(0, 1)$. Mostrare che esiste un minimo di F in $W_0^{1,4}(0, 1)$.

Exercise 3. Sia $f \geq 0$ una funzione tale che

$$f \in L^1(0, 1), \quad f \notin L^2(0, 1).$$

Consideriamo il seguente operatore lineare $T : C_c^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definito come:

$$T(u) = \int_0^1 u(x)f(x) dx$$

- (a) Mostrare che T non può essere esteso ad un operatore lineare limitato su $L^2(0, 1)$.
(b) Dimostrare invece che l'operatore T può essere esteso a un operatore lineare limitato (con norma $\|T\|$) su $W_0^{1,2}(0, 1)$ munito della norma $\|u\|_{W_0^{1,2}(0,1)}^2 = \int_0^1 (u')^2 dx$ e mostrare che

$$\|T\| < \|f\|_{L^1(0,1)}.$$