

Istituzioni di Analisi Matematica

Esame scritto

24 luglio 2026

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch
(né di altri dispositivi connessi),
né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Exercise 1. Siano $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ una successione di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ ed $(a_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali. Per ogni $n \geq 1$ definiamo la funzione

$$g_n(x) = f_n(x - a_n).$$

- (1) Mostrare che se f_n converge fortemente in $L^2(\mathbb{R})$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, allora g_n converge debolmente in L^2 a g , dove $g(x) := f(x - a)$.
- (2) Mostrare che se f_n converge fortemente in $L^2(\mathbb{R})$ ad una funzione $f \in L^2$ e se $a_n \rightarrow +\infty$, allora g_n converge debolmente a 0.
- (3) È vero che se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ ed f_n converge debolmente in L^2 , allora g_n converge debolmente in L^2 ?
- (4) È vero che se $a_n \rightarrow +\infty$ ed f_n converge debolmente in L^2 , allora g_n converge debolmente in L^2 ?

Exercise 2. Sia Ω un insieme aperto e limitato in $\mathbb{R}^4$.

(A) Mostrare che per ogni funzione $g \in L^{3/2}(\Omega)$ esiste un minimo del funzionale

$$\mathcal{F}_g : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

definito come

$$\mathcal{F}_g(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} u(x)g(x) dx.$$

(B) Sia g_n una successione in $L^{3/2}(\Omega)$ che converge fortemente ad una $g \in L^{3/2}(\Omega)$. Mostrare che i minimi $u_n \in H_0^1(\Omega)$ di $\mathcal{F}_{g_n}$ convergono fortemente in $H^1(\Omega)$ al minimo u di $\mathcal{F}_g$.