

Soluzioni deboli del problema di Poisson

SOLUZIONI DEBOLI E FORMULAZIONE VARIAZIONALE

Definizione 1 (Soluzioni deboli). Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Diciamo che la funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi \, dx \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Proposizione 2 (Formulazione variazionale). Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Data una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ sono equivalenti:

(1) u è soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega);$$

(2) per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} v f \, dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (1) implica (2). Sia $v \in H_0^1(\Omega)$ una funzione qualsiasi. Poniamo $\varphi = v - u$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} v f \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + \varphi)|^2 \, dx - \int_{\Omega} (u + \varphi) f \, dx \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \right) + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx + \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi f \, dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \right) + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \right). \end{aligned}$$

dove, abbiamo usato che siccome u è soluzione debole e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0.$$

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Fissiamo una funzione $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ consideriamo il competitor $v_t := u + t\varphi$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_t|^2 \, dx - \int_{\Omega} v_t f \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 \, dx - \int_{\Omega} (u + t\varphi) f \, dx \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \right) + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx + t \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi f \, dx \right). \end{aligned}$$

Siccome la disuguaglianza deve essere vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0. \quad \square$$

ESISTENZA E UNICITÀ DELLE SOLUZIONI

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione useremo la disuguaglianza di Poincaré.

Teorema 3 (Disuguaglianza di Poincaré). Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.

Allora esiste una costante $C_{\Omega} > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} \varphi^2(x) \, dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Proposizione 4 (Unicità della soluzione). *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Siano $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ due soluzioni deboli di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Allora $u = v$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2 dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u-v) dx - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(u-v) dx \\ &= \int_{\Omega} f(u-v) dx - \int_{\Omega} f(u-v) dx = 0. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo che anche

$$\int_{\Omega} (u-v)^2 dx = 0,$$

e quindi $u = v$ in Ω . □

Proposizione 5 (Esistenza di una soluzione). *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Per ogni funzione $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, definiamo

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi dx.$$

Consideriamo anche

$$I := \inf \left\{ J(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Osserviamo che $I \leq 0$. Infatti, siccome la costante 0 è nello spazio $H_0^1(\Omega)$, si ha che

$$I \leq J(0) = 0.$$

Sia ora $u_n \in H_0^1(\Omega)$ una successione di funzioni in $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = I.$$

Possiamo supporre che

$$J(u_n) \leq 0 \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

In particolare,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} f u_n dx \leq 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

e quindi

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Applicando di nuovo la disuguaglianza di Poincaré,

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_{\Omega}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, la successione u_n è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Di conseguenza, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge debolmente in $H_0^1(\Omega)$ ad una certa funzione $u \in H_0^1(\Omega)$. Per le proprietà della convergenza debole,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f u_{n_k} dx,$$

e quindi,

$$J(u) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}) = I.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$J(u) = \min \left\{ J(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad \square$$