

Compito di Analisi 2 del 09 – 06 – 2025, Ingegneria Civile

Esercizio 1 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 + y^2) \ln x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Provare che il dominio massimale della soluzione contiene l'intervallo $(0, e)$.

Esercizio 2 Provare che esistono $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy \leq 1\}, \quad f(x, y) = xy.$$

Calcolare esplicitamente $\max_K f$ e $\min_K f$.

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (4e^x, 2y^3z, -3y^2z^2)$ lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq -y^2 - z^2 + 4\}$$

orientato secondo la normale esterna

SOLUZIONI

Esercizio 1 L'equazione e' a variabili separabili, quindi abbiamo

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+s^2} ds = \int_1^x \ln s ds$$

da cui

$$\operatorname{arctg} y(x) = x \ln x - x + 1$$

da cui

$$y(x) = \operatorname{tg}(x \ln x - x + 1).$$

Per rispondere alla seconda questione basta provare che

$$(0, e) \subset \{x > 0 \text{ t.c. } x \ln x - x + 1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}.$$

E' facile vedere che la funzione $x \ln x - x + 1$, definita su $(0, \infty)$ ha minimo per $x = 1$, dove vale 0. Inoltre vale 1 per $x = 0$, e' decrescente su $(0, 1)$ e crescente su $(1, \infty)$ e per $x = e$ vale 1. Quindi su $(0, e)$ l'immagine di $x \ln x - x + 1$ e' l'intervallo $(0, 1) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 2 La funzione f e' continua (perche' e' un polinomio) e l'insieme K e' chiuso (essendo insieme di punti dove una funzione continua e' minore o uguale a 0). Inoltre K e' limitato, infatti abbiamo

$$x^2 + y^2 + xy - 1 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + (1 - \frac{1}{4})y^2 - 1$$

e quindi abbiamo che, a meno del cambio di variabili lineare $X = x + \frac{1}{2}y, Y = y$, l'insieme K equivale a

$$\{(X, Y) | X^2 + \frac{3}{4}Y^2 \leq 1\}$$

che e' un ellisse e quindi limitato. Per il calcolo esplicito del massimo e del minimo cerchiamo i punti critici interni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che implica $(x, y) = (0, 0) \in K$. Inoltre in $(0, 0)$ la funzione f vale 0.

Vediamo di studiare il bordo con i moltiplicatori di Lagrange. Il primo sistema equivale a

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

che non ammette soluzioni, infatti le prime due equazioni rappresentano un sistema lineare che ammette $(0,0)$ come unica soluzione, ma questa soluzione e' incompatibile con la terza equazione. Passiamo al secondo sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x + y) \\ x = \lambda(2y + x) \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y(1 - \lambda) - 2\lambda x = 0 \\ x(1 - \lambda) - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che il primo sistema e' lineare in (x, y) quindi ammette soluzioni non nulle solo se ha determinante nullo e quindi solo se

$$4\lambda^2 - (1 - \lambda)^2 = 0$$

Osserviamo anche che la soluzione $(0,0)$ non e' compatibile con la terza equazione. Quindi dobbiamo considerare solo i λ tali che

$$4\lambda^2 - (1 - \lambda)^2 = 0$$

ossia

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

ossia

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

ossia $\lambda = -1, \frac{1}{3}$. In corrispondenza a $\lambda = \frac{1}{3}$ le prime due equazioni danno come soluzione $y = x$ che per la terza equazione implica

$$3x^2 = 1$$

e quindi troviamo i punti $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ invece per $\lambda = -1$ troviamo $y = -x$ che per la terza equazione implica

$$x^2 = 1$$

e quindi troviamo i punti $(1, -1), (-1, 1)$. Da confronto diretto si ha che

$$\max_K f = \frac{1}{3}, \min_K f = -1.$$

Esercizio 3 Procediamo usando il teorema della divergenza, quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \int \int_{y^2+z^2 \leq 4} \left(\int_0^{4-y^2-z^2} 4e^x dx \right) dy dz \\&= 4 \int \int_{y^2+z^2 \leq 4} (e^{4-y^2-z^2} - 1) dy dz = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (e^{4-\rho^2} - 1) \rho d\theta d\rho \\&= 8\pi \left[-\frac{1}{2} e^{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{2} \right]_0^2 = 8\pi \left[-\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} e^4 \right] = 4\pi [-5 + e^4]\end{aligned}$$