

Analisi 2 Ingegneria Civile 03 – 07 – 2026

Esercizio 1 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2) - x^2 + xy^2 + y^2 + 2$$

e studiarne la natura (dire se si tratta di max loc., min loc., sella).

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} x e^{\sqrt{y}} dx dy$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (z, x^2 y, y^2 z)$$

lungo il bordo dell' insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) | 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < 1 + x^2 + y^2\}$$

orientato secondo la normale esterna.

SOLUZIONI

Esercizio 1 I punti critici soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} - 2x + y^2 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

quindi dalla seconda equazione abbiamo $y = 0$ oppure $x = -1$. Se $y = 0$ dalla prima equazione troviamo $x = 0$. Nel caso $x = -1$, dalla prima equazione troviamo

$$1 + y^2 = 0$$

che non ammette soluzioni reali. Quindi l'unico punto critico è $(0, 0)$. Per studiarne la natura proviamo il test della matrice hessiana. La matrice Hessiana in $(0, 0)$ ha tre entrate nulle, quindi non possiamo applicare il test della matrice hessiana. Procediamo quindi per restrizione. Sull'asse y la funzione è $y^2 + 2$ mentre sull'asse x la funzione è $\ln(1+x^2) - x^2 + 2$. Da considerazioni elementari si vede che la prima funzione ha un minimo in 0 mentre la seconda ha un massimo in 0, quindi il punto $(0, 0)$ è di sella.

Esercizio 2 Calcoliamo l'integrale doppio vedendo Ω come normale rispetto ad y :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{\sqrt{y}} x dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^x e^z 2z dz \right)$$

dove abbiamo fatto il cambio di variabile $\sqrt{y} = z$, quindi

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^1 2x([ze^z]_0^x - \int_0^x e^z dz) dx = \int_0^1 (2x^2 e^x - 2xe^x + 2x) dx \\ &= [2x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 4xe^x dx - \int_0^1 2xe^x dx + 1 \\ &= 2e - \int_0^1 6xe^x dx + 1 = 2e - [6xe^x]_0^1 + 6 \int_0^1 e^x dx + 1 = -4e + 6e - 6 + 1 = 2e - 5 \end{aligned}$$

Esercizio 3 Osserviamo che

$$\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2$$

quindi per il teorema della divergenza basta calcolare

$$\int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

che integriamo per fili:

$$\begin{aligned} & \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} (x^2+y^2) dz \right) dx dy \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)-2\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3(1+\rho^2-2\rho) d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{15+10-24}{60} \right) = \frac{\pi}{30} \end{aligned}$$