

Esercizi
27 novembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, convessa. Mostrare che se f non è costante e $f(0) < 0$ allora il numero di zeri di f è 0 o 1 o 2.

-Vi sono al più due zeri: se per assurdo $f(x) = f(y) = f(z) = 0$, $x < y < z$, in particolare, poichè i tre zeri sono diversi da 0 essendo $f(0) < 0$, ve ne sarebbero almeno due con lo stesso segno. Ma se si avesse $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$, $0 < a < b$, si otterrebbe una contraddizione dall'ipotesi di convessità:

$$0 = f(a) \leq f(0) + \frac{f(b) - f(0)}{b}a = f(0)\left(1 - \frac{a}{b}\right) < 0.$$

Analogamente si ottiene una contraddizione se $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$, $a < b < 0$.

-Vi è almeno uno zero:

- se vi è almeno un a per cui $f'_+(a) \neq 0$ oppure $f'_-(a) \neq 0$ si ottiene quanto desiderato. Infatti:

se $f'_-(a) < 0$ si ha: $f(x) \geq f'_-(a)(x - a) + f(a) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. In Particolare vi è $x < 0$ con $f(x) > 0$. Essendo f convessa su $\mathbf{R}$ è continua in $[x, 0]$. Poichè $f(0)f(x) < 0$ per il teorema del valor medio vi è $\xi \in]x, 0[$ per cui $f(\xi) = 0$;

se $f'_+(a) > 0$ si ha $f(x) \geq f'_+(a)(x - a) + f(a) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$. Argomentando come al punto precedente si trova $\xi > 0$ per cui $f(\xi) = 0$;

poichè $f'_+(a) \geq f'_-(a)$, non rimarrebbero altri casi da analizzare;

- se per assurdo $\forall a : f'_+(a) = f'_-(a) = 0$ si avrebbe che $\forall a \exists f'(a) = 0$, cioè f sarebbe derivabile su tutto $\mathbf{R}$ con derivata nulla. Ma allora sarebbe costante, contraddicendo l'ipotesi.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Poichè la funzione da integrare è definita per $x > 0$, si considera il seguente cambio di variabile $t = \sqrt[6]{x}$, per cui $t^6 = x$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= [t = \sqrt[6]{x}] \quad 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t + 1} dt = \\ 6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - 6 \int \frac{1}{t + 1} dt &= 6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - 6 \log(t + 1) = \\ 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \log(t + 1) &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log(t + 1) = \\ [t = \sqrt[6]{x}] \quad 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \log(\sqrt[6]{x} + 1)^6. \end{aligned}$$

3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1 + t^2} dt, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

- (a) *calcolare se esiste la derivata di f* : la funzione $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ è continua su $\mathbf{R}$. Quindi la funzione integrale $F(y) = \int_0^y g(t)dt$ è derivabile su tutto $\mathbf{R}$. D'altronde $f(x) = F(\tan x)$. Quindi f è derivabile per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$), e si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(\tan x) \cdot (\tan x)' = g(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x) = \\ &= \sin(\tan x), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

- (b) *si provi che f è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}$* : nel suo dominio di definizione f è continua essendo derivabile. Affinché $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sia continua ed estenda f basta che:

$$\varphi(x) = f(x), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \& \quad \exists \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \varphi(y) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right);$$

poichè se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha $\exists \lim_{y \rightarrow x} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) = \varphi(x)$.

Quindi basta provare che: $\exists \lim_{y \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)} f(y) =_{def} L_k$,

$$\text{e quindi definire: } \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ L_k & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Per provare l'esistenza del limite di f nei punti in cui non è definita basta provare che esistono il limite destro ed il limite sinistro e sono uguali. Osservando inoltre che f è π -**periodica** basta dimostrare:

$$\exists \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(y) = l_1 \quad \& \quad \exists \lim_{y \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(y) = l_2 \quad \& \quad l_1 = l_2 \in \mathbf{R}.$$

Poichè la funzione $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ è Riemann integrabile sugli intervalli limitati (è continua), ed è in modulo minore di $\frac{1}{1+t^2}$ non negativa e sommabile in senso generalizzato su tutto $\mathbf{R}$, si ha che anche $g(t)$ è sommabile in senso generalizzato su tutto $\mathbf{R}$. In particolare è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$, cioè:

$$\exists \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2} dt = l_1 \in \mathbf{R}.$$

Quindi poichè $\tan x \rightarrow +\infty$, se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, si ha:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2} dt \in \mathbf{R}.$$

Analogamente si ha che esiste $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = l_2 \in \mathbf{R}$, essendo $g(t)$ integrabile in senso improprio su $(-\infty, 0]$, e $\tan x \rightarrow -\infty$, se $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+$. Per provare che tali limiti sono uguali basta osservare che la funzione $g(t)$ è **dispari**, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int_0^{-y} \frac{\sin t}{1+t^2} dt &= - \int_{-y}^0 \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \int_{-y}^0 \frac{\sin(-t)}{1+(-t)^2} dt = - \int_y^0 \frac{\sin \tau}{1+\tau^2} d\tau \\ &= \int_0^y \frac{\sin \tau}{1+\tau^2} d\tau \end{aligned}$$

- (c) *chissà se l'estensione è derivabile su tutto $\mathbf{R}$?* : si considera l'estensione di f a tutto $\mathbf{R}$, che per quanto provato è:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Si osserva che la funzione φ è derivabile nei punti $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ poichè è estensione di una funzione che è derivabile in tutto un intervallo aperto che contiene uno di tali x .

Poichè la funzione φ è π -**periodica**, per verificare se φ è derivabile nei punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ potrebbe bastare provare che:

$$\exists \varphi'_- \left(\frac{\pi}{2} \right) \ \& \ \exists \varphi'_+ \left(-\frac{\pi}{2} \right) \ \& \ \varphi'_- \left(\frac{\pi}{2} \right) = \varphi'_+ \left(-\frac{\pi}{2} \right).$$

Si esamina l'esistenza di $\varphi'_- \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Dato $x < \frac{\pi}{2}$, si considera il rapporto incrementale di φ in $\frac{\pi}{2}$:

$$\Delta(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt.$$

Inizialmente si osserva che: $|\Delta(x)| \leq 1$, in quanto **il modulo dell'integrale è minore o eguale all'integrale del modulo**, e $|\sin t| \leq 1$, e $\int_{\tan x}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1$.

Questa stima sembra non ottimale poichè non tiene conto delle oscillazioni del $\sin t$ tra valori negativi e valori positivi che potrebbero abbassare di molto il valore del modulo dell'integrale rispetto al valore dell'integrale del modulo. In effetti questa diminuzione è drastica, e viene messa in evidenza integrando **per parti**: $\Delta(x) =$

$$\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{-\cos t}{1+t^2} \right]_{\tan x}^{+\infty} - \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{2t \cos t}{(1+t^2)^2} dt \right\},$$

quindi: $\Delta(x) = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{-\cos(\tan x)}{1+(\tan x)^2} - \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{2t \cos t}{(1+t^2)^2} dt \right\}$, per cui si ha la stima (si consideri $x > 0$ per avere $\tan x > 0$):

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{|\cos(\tan x)|}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{|2t \cos t|}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{|2t|}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{1+(\tan x)^2}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2} d\tau \right\} \\ &= 2 \frac{(\cos x)^2}{\frac{\pi}{2} - x} = 2 \frac{(\sin(\frac{\pi}{2} - x))^2}{\frac{\pi}{2} - x} \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-. \end{aligned}$$

Quindi $\exists \varphi'_- \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$. In modo del tutto analogo si ha $\exists \varphi'_+ \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$. Quindi φ è derivabile anche in tutti i punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, e la sua derivata è nulla.