

esercizi del 24/2/2000

Esercizio 1

Calcolare lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine in un intorno di 0 delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \log(\cos(x))$
2. $f(x) = e \sin(x)$
3. $\begin{cases} f(x) = e^{x^{-2}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Calcolare lo sviluppo di Taylor fino al terzo ordine in un intorno di 1 della funzione $f(x) = x^x$

Esercizio 2

Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n!)}{n \log n} = 1$$

Esercizio 3

Dimostrare che esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

Esercizio 4

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi e n!)$

Esercizio 5

Sia $r \in \mathbb{R}$ un numero *irrazionale*. Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $|nr - m| \leq \epsilon$

Esercizio 6

Dimostrare che un qualunque insieme di aperti disgiunti di $\mathbb{R}$ è al più numerabile