

24 novembre 1999

1. Notazione: se I è un insieme (insieme degli indici), X è un insieme (insieme ambiente), e per ogni $i \in I$ è dato un insieme $A_i \subset X$ allora si definisce l'unione degli A_i come:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

- (a) Si dia una definizione analoga per l'intersezione $\bigcap_{i \in I} A_i$ e si verifichi che vale la formula

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

- (b) Sia I l'insieme degli interi positivi e definiamo, per $n \in I$,

$$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad B_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[, \quad C_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad D_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[.$$

Si determinino:

$$\bigcup_{n \in I} A_n, \quad \bigcup_{n \in I} B_n, \quad \bigcup_{n \in I} C_n, \quad \bigcup_{n \in I} D_n.$$

2. Notazione:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf \{f(x) : x \in A\} = \inf f(A).$$

Sia $I =]0, +\infty[$. Si determinino i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} \sup_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}; & \quad \sup_{x \in I} \inf_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}; \\ \inf_{y \in I} \sup_{x \in I} \arctan \frac{y}{x}; & \quad \inf_{x \in I} \inf_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

3. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata (cioè tale che esiste $M > 0$ per cui $|g(x)| < M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xg(x)$ è continua in 0.
4. Dire, nei seguenti casi, se vi sono funzioni con la proprietà specificata. In caso affermativo si trovi un esempio, in caso negativo si provi quanto asserito:
 - (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua, surgettiva;
 - (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua, iniettiva;
 - (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua, bigettiva;
 - (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ continua, bigettiva;
 - (e) $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
 - (f) $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
 - (g) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
 - (h) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bigettiva.
5. Sia C un sottoinsieme del piano cartesiano, e sia $p(t)$ il punto del piano di coordinate $(t, 0)$. Consideriamo la funzione $f_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(t) = \text{dist}(p(t), C) = \inf_{q \in C} d(p(t), q) = \inf_{(x, y) \in C} \sqrt{(x - t)^2 + y^2}.$$

- (a) Si provi che la funzione f_C è continua.
 - (b) Supponiamo ora che $\text{dist}(0, C) < 1$. Si provi che in questo caso f_C ammette minimo.
 - (c) Si trovi un insieme C per cui f_C non ammette minimo.
6. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare che f è monotona.