

15 dicembre 1999

1. Sia $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua. Provare che esiste $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = x$.
2. Si consideri l'equazione integrale

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x). \quad (*)$$

- (a) Si trovino tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che verificano (*).
 - (b) Si provi che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica (*) allora f è differenziabile infinite volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - (c) Si trovino tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che verificano (*).
3. Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si dice invece *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Siano f e g funzioni pari. Si dica (quando possibile) se le funzioni

$$(f(x))^n \quad f(x)g(x) \quad f(g(x)) \quad f(x)+g(x) \quad f'(x) \quad \int_0^x f(t) dt$$

sono pari o dispari. Si faccia lo stesso per f e g dispari, per f pari e g dispari e infine per f dispari e g pari.

- (b) Si calcoli

$$\int_{\log(0.5)}^{\log(2)} \frac{\sin x \frac{\sqrt{\sin^2(\cos x) + \pi e^{(x^4)}}}{1 + (xe^{\cos x} \sin x)^2} + 2 \sin(x^2 + 2) \arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)}{1 + e^{-\frac{x^2}{2}} + x^7 \sin(-\pi x) + \frac{12}{11} |x|^{2\pi+1}} dx.$$

- (c) Sia $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\begin{cases} u'(x) &= e^{\cos x} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

Si provi che

$$\int_{-1}^1 u(x) dx = 2.$$

4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.
 - (a) Provare che f non può avere esattamente 3 zeri.
 - (b) Provare che se f ha esattamente due zeri allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

(Suggerimento. Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa ($I \subset \mathbb{R}$), allora per ogni $x_0 \in I$ esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$).

5. Sia $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^2$ tale che

$$\begin{cases} u''(x) &= \frac{1}{1 + e^{u(x)}} \\ u'(0) &= 1 \\ u(0) &= 0. \end{cases}$$

Si provi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

6. Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$. Provare che

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq (f(0) - f(1))^2$$

e che se vale l'uguaglianza allora f è lineare (cioè $f(t) = at + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$).