

26 gennaio 2000

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{(\tan x)(x \log(1-x) + e^{x^2} - 1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right).$$

2. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$0 < n!e - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1}.$$

Provare quindi che e è irrazionale.

3. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Provare che se f ammette derivata seconda in x allora il seguente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

esiste e coincide con $f''(x)$. Verificare che il viceversa non è sempre vero.

4. Sia $f \in C^1([a, b])$. Definiamo la lunghezza del grafico di f come

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Dimostrare che $\ell(f)$ è sempre maggiore o uguale alla lunghezza del segmento tra i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.