

Analisi Matematica Due

Soluzioni della prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

19 novembre 2001

1. (a) Provare che la funzione $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^1$.

- (b) Provare che la funzione $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^2$.

Soluzione.

- (a) Per $x \neq 0$ la funzione f è derivabile e si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy \log |x| + xy \\ f_y(x, y) &= x^2 \log |x|. \end{aligned}$$

Se $x = 0$ calcoliamo le derivate (verificando anche che esistono) mediante il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} hy \log |h| = 0; \\ f_y(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora dimostrare che le derivate parziali f_x e f_y sono continue su tutto $\mathbf{R}^2$. Se $x \neq 0$ tali derivate parziali sono continue in (x, y) in quanto composizione di funzioni continue. Verifichiamo quindi che le derivate parziali sono continue anche nei punti $(0, \bar{y})$ stimando gli

incrementi di f_x e f_y in tale punto. Dato un punto qualunque (x, y) poniamo $r = \sqrt{x^2 + (y - \bar{y})^2}$ e notiamo che per $r \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} |f_x(x, y) - f_x(0, \bar{y})| &= |2xy \log |x|| \leq |2ry \log r| \rightarrow 0, \\ |f_y(x, y) - f_y(0, \bar{y})| &= x^2 \log |x| \leq r^2 \log r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(ad essere precisi l'uguaglianza nella seconda stima ha senso solo quando $x \neq 0$, ma per $x = 0$ la quantità da stimare è di per sè nulla). Dunque $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ sono funzioni continue per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ cioè f è di classe $\mathcal{C}^1$.

- (b) Se $(x, y) \neq (0, 0)$ possiamo calcolare facilmente le derivate prime e seconde di f :

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^3y}{x^2 + y^2}, \\ f_y(x, y) &= x^2 \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}, \\ f_{xx}(x, y) &= 2y \log(x^2 + y^2) + \frac{4x^2y}{x^2 + y^2} + \frac{6x^2(x^2 + y^2) - 4x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_{xy}(x, y) &= 2x \log(x^2 + y^2) + \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{2x^3(x^2 + y^2) - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y(x^2 + y^2) - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Notiamo anche che (sempre se $(x, y) \neq (0, 0)$) si ha $f_{xy} = f_{yx}$ in quanto se $x^2 + y^2 \neq 0$ la funzione f è composizione di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ e quindi le derivate seconde sono necessariamente continue.

Se invece $(x, y) = (0, 0)$ dobbiamo calcolare le derivate prime e seconde tramite il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ f_{xx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \log h^2}{h} = 0, \\ f_{yy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0, h) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Non resta ora che verificare la continuità delle derivate seconde nel punto $(0, 0)$. Posto $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ha, per $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} |f_{xx}(x, y) - f_{xx}(0, 0)| &\leq 2r \log(r^2) + \frac{4r^3}{2r^2} + \frac{12r^5 + 4r^5}{4r^4} \rightarrow 0, \\ |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(0, 0)| &= |f_{yx}(x, y) - f_{yx}(0, 0)| \\ &\leq 2r \log(r^2) + \frac{4r^3}{2r^2} + \frac{4r^5 + 4r^5}{4r^4} \rightarrow 0, \\ |f_{yy}(x, y) - f_{yy}(0, 0)| &\leq \frac{2r^3}{2r^2} + \frac{r^5 + 4r^5}{4r^4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque le derivate parziali seconde sono continue e quindi f è di classe $\mathcal{C}^2$.

2. Data $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2x^4 + 3x^2y - 2y$$

- (a) determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi o minimi relativi;
- (b) trovare il valore massimo e il valore minimo assunto da f sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 \leq y \leq 1\}$;
- (c) trovare l'insieme $f(\mathbf{R}^2)$ di tutti i valori assunti da f su $\mathbf{R}^2$.

Soluzione.

- (a) I punti critici di f devono risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 8x^3 + 6xy = 0 \\ f_y(x, y) = 3x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x = \pm\sqrt{2/3}$ e $y = -8/9$. Si hanno quindi due punti critici: $(\sqrt{2/3}, -8/9)$, $(-\sqrt{2/3}, -8/9)$. Calcoliamo ora le derivate seconde di f :

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 + 6y & 6x \\ 6x & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante Hessiano risulta quindi $\det D^2f(x, y) = -36x^2$ e nei punti critici tale determinante vale $-24 < 0$. I punti critici non sono dunque nè massimi nè minimi relativi.

- (b) I valori massimo e minimo di f sull'insieme $A = \{x^2 \leq y \leq 1\}$ (il teorema di Weierstraß ci assicura che f ammette massimo e minimo su A) non possono essere assunti all'interno di A in quanto non ci

sono punti critici di f in A , dunque massimo e minimo vanno cercati sul bordo di A . Dividiamo il bordo di A in due parti: $y = 1$ e $y = x^2$.

Per la parte di bordo in cui $y = 1$ possiamo considerare la funzione ausiliaria $g(x) = f(x, 1)$ di cui cerchiamo i valori massimo e minimo per $x \in [-1, 1]$. Si ha $g'(x) = f_x(x, 1) = 8x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$ e quindi $g'(x) = 0$ soltanto se $x = 0$. Il valore assunto nel punto critico di g è $g(0) = f(0, 1) = -2$. Per quanto riguarda la curva $y = x^2$ possiamo considerare la funzione ausiliaria $g(x) = f(x, x^2)$ con $x \in [-1, 1]$. Si ha $g'(x) = f_x(x, x^2) + 2xf_y(x, x^2) = 8x^3 + 6x^3 + 2x(3x^2 - 2) = 20x^3 - 4x$ che si annulla per $x = 0$ oppure per $x^2 = 1/5$. Entrambi i punti sono ammissibili e i valori assunti sono $g(0) = f(0, 0) = 0$, $g(\pm\sqrt{1/5}) = f(\pm\sqrt{1/5}, 1/5) = 2/25 + 3/25 - 2/5 = -1/5$. Dobbiamo anche tenere in considerazione gli estremi delle due parametrizzazioni: $f(\pm 1, 1) = 3$.

Riassumendo il valore massimo assunto da f su A è 3 mentre il valore minimo è -2 .

- (c) Notiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 = +\infty$ mentre vale $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} -2y = -\infty$. Dunque $\sup f(\mathbf{R}^2) = +\infty$ e $\inf f(\mathbf{R}^2) = -\infty$. Per il teorema dei valori intermedi (essendo $\mathbf{R}^2$ connesso e f continua) tutti i valori compresi tra $\sup f$ e $\inf f$ sono assunti e quindi $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$.

3. Sia $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile tale che

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ f^2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Provare che $f = 0$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate seconde miste di f :

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= D_y f_x(x, y) = D_y f(x, y) = f_y(x, y) = f^2(x, y) \\ f_{yx}(x, y) &= D_x f_y(x, y) = D_x f^2(x, y) = 2f(x, y)f_x(x, y) = 2f^2(x, y). \end{aligned}$$

Siccome f è per ipotesi continua, anche le derivate seconde miste risultano essere continue e per il teorema di Schwarz devono essere uguali. Si ottiene quindi che per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vale $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ da cui si ricava $f(x, y) = 0$.