

Studio qualitativo

26 marzo 2002

1. Studiare qualitativamente le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali autonome:

$$y' = (y - 1) \arctan y, \quad y' = \log y, \quad y' = \sin y, \quad y' = e^y - 1$$

2. Studiare qualitativamente le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' = y(y + x), \quad y' = y(y^2 - x), \quad y' = xy(1 - x^2 + y^2)$$

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y - e^x + 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Dimostrare che per $y_0 \leq 0$ c'è esistenza globale. Dimostrare che invece per $y_0 > 0$ non c'è esistenza globale.

4. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2 y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- (a) Verificare che l'insieme delle soluzioni ha simmetria centrale (cioè che se $y(x)$ è una soluzione allora anche $-y(-x)$ è soluzione).
- (b) Dimostrare che esiste $\alpha > 0$ tale che se $|y_0| < \alpha$ la soluzione del problema di Cauchy è globale (cioè definita su tutto $\mathbf{R}$).
- (c) Mostrare che esiste $\beta > 0$ tale che se $|y_0| > \beta$ la soluzione del problema di Cauchy non ha esistenza globale.