

Forme differenziali

22 aprile 2002

1. Determinare tra le seguenti forme differenziali quelle chiuse e quelle esatte:

$$-y \, dx + \sin x \, dy, \quad xy \, dx + \frac{x^2}{2} \, dy, \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y \, dx - x \, dy).$$

2. Sia γ_r la circonferenza di raggio r di equazione parametrica $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ con $t \in [0, 2\pi]$. Posto

$$\omega = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

determinare per ogni $r > 0$ il valore di $\int_{\gamma_r} \omega$.

Dopo aver verificato che ω è una forma chiusa, determinare $\int_{\eta} \omega$ quando η è la curva chiusa di equazione $x(t) = (2 + 6 \cos t) \sin t$, $y(t) = 12 + 9 \sin t$ ($t \in [0, 2\pi]$).

3. Determinare $\int_{\gamma} \omega$ quando

$$\gamma(t) = (1 + t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [-1, 1],$$

$$\omega = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}.$$

4. Dato $r > 0$, $r \neq 1$ poniamo

$$\gamma(t) = (1 + r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\omega = \frac{(x - y) \, dx + (x + y) \, dy}{x^2 + y^2}.$$

Verificare che ω è una forma chiusa ma non è esatta. Determinare poi, al variare di r , il valore di $\int_{\gamma} \omega$.

5. Mostrare che la forma

$$\omega = \frac{y \, dx - (x + 1) \, dy}{(x + 1)^2 + y^2} - \frac{y \, dx - (x - 1) \, dy}{(x - 1)^2 + y^2}$$

è chiusa. Determinare poi $\int_{\gamma} \omega$ per ognuna delle seguenti curve γ parametrizzate al variare di $t \in [0, 2\pi]$:

$$(\sin t - \cos t, 1 + (t - \pi)^2), \quad (\cos t - 1, \sin t),$$

$$(3 + 5 \cos t, \sin t), \quad (\cos \frac{t}{2}, t^2 - 2\pi t + 2).$$

Revisioni

11 aprile 2003: corretto l'enunciato dell'esercizio 3.

6 aprile 2004: modificate le curve nell'esercizio 5.