

Analisi Matematica III modulo

Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

16 aprile 2004

1. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

è continua e se è differenziabile in nel punto $(0, 0)$.

Soluzione. Essendo

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2 y^2 + |y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)y^2 + (x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ la funzione risulta essere continua.

Per studiare la differenziabilità calcoliamo le derivate direzionali lungo il vettore $v = (\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h\alpha)^2(h\beta)^2 - (h\beta)^3}{h(h^2\alpha^2 + h^2\beta^2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\alpha^2\beta^2 - \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Siccome quest'ultima espressione non è lineare in α e β concludiamo che la funzione non è differenziabile in $(0, 0)$.

2. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\arctan(x + k^2) - \frac{\pi}{2} \right]$$

è definita, è derivabile e la derivata è continua su tutta la retta reale $\mathbb{R}$ (suggerimento: studiare la convergenza totale della serie delle derivate).

Soluzione. Notiamo innanzitutto che

$$\arctan(x + k^2) - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{k^2} + o(1/k) \quad k \rightarrow \infty$$

in quanto si ha

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x + k^2) - \pi/2}{1/k^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x + 1/t^2) - \pi/2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-2t^{-3}}{1+(x+1/t^2)^2}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2}{t^4 + (xt^2 + 1)^2} = -2. \end{aligned}$$

Dunque, per il criterio degli infinitesimi, la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque la funzione $f(x)$ è ben definita.

Posto $g_k(x) = \arctan(x + k^2) - \pi/2$ studiamo ora la convergenza totale della serie delle derivate $\sum g'_k(x)$. La funzione $g'_k(x) = \frac{1}{1+(x+k^2)^2}$ è positiva, ha un unico punto di massimo per $x = -k^2$, è crescente per $x \leq -k^2$ e decrescente per $x \geq -k^2$. Essendo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'_k(x)| = g'_k(-k^2) = 1$$

non si ha dunque convergenza totale della serie su tutto $\mathbb{R}$.

Se però ci restringiamo ad un intervallo $I = [a, +\infty)$ per ogni k sufficientemente grande ($k^2 \geq a$) si ha

$$\sup_{x \in I} |g'_k(x)| = g'_k(a) = \frac{1}{1 + (a + k^2)^2}$$

ed essendo

$$\sum_k \frac{1}{1 + (a + k^2)^2} < +\infty$$

la serie $\sum g'_k(x)$ converge totalmente sull'intervallo I . Siccome la serie $\sum g_k$ converge puntualmente su I e la serie delle sue derivate $\sum g'_k$ converge uniformemente su I , per il teorema di scambio della serie con la derivata, si ha che su I la funzione $f = \sum g_k$ è derivabile con derivata $f' = \sum g'_k$. D'altra parte le funzioni g'_k sono funzioni continue su I e la loro serie converge uniformemente. Dunque f' è una funzione continua su I .

Siccome questo è vero per $I = [a, +\infty)$ per qualunque a , deduciamo che f è derivabile con derivata continua su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su Ω e continua su $\bar{\Omega}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto e limitato. Dimostrare che se f verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \neq 0 \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

allora il massimo di f su $\bar{\Omega}$ è uguale al massimo di f su $\partial\Omega$.

Soluzione. Notiamo che le condizioni su f ci dicono che il determinante Hessiano di f è sempre negativo:

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \det D^2 f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right)^2 \\ &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right)^2 < 0. \end{aligned}$$

Questo significa che ogni eventuale punto critico di f in Ω è un punto di sella e quindi non è né massimo né minimo.

Di conseguenza i punti di massimo e minimo di f su $\bar{\Omega}$ non stanno su Ω e quindi si trovano tutti su $\partial\Omega$.