

Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi IV modulo

a.a. 2003-2004

[18.2.2004]

Equazioni differenziali a variabili separabili:

$$y' = -2xy^2, \quad xy' = 2y, \quad y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y' = \sqrt{1-y^2}.$$

Per casa:

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad yy' = 2x^3, \quad y' = x\sqrt{1-y^2}$$

[25.2.2004]

Equazioni a variabili separabili

$$y' = xe^{x^2+y}, \quad \begin{cases} y' = 5x^2\sqrt{y}^3 \\ y(2) = 33 - 2\sqrt{32}. \end{cases}$$

Equazioni omogenee:

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}, \quad y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}.$$

Equazioni di Bernoulli:

$$y' + y \sin x + y^4 \sin(2x) = 0.$$

[3.3.2004]

Equazioni di Clairaut:

$$y = xy' - 2\sqrt{y'} + 1, \quad y = (1+x)y' + (y')^2.$$

Equazioni esatte:

$$x + y^2 + (2xy + 2y^3)y' = 0, \quad y' = \frac{x - 3y}{3x + y}.$$

[10.3.2004]

Equazione da risolvere per sostituzione:

$$(y - x)(y' - 1) = [(y - x)^2 + 1] \log x.$$

Equazioni del secondo ordine:

$$y'' = \frac{y'}{x} + 1, \quad \begin{cases} y'' = y^2(y')^3 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Studio qualitativo delle soluzioni

$$\begin{cases} y' = y(y - \arctan x)^2 \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

[17.3.2004]

Studio qualitativo delle equazioni differenziali

$$\begin{aligned} y' &= \log y, & y' &= (y - 1) \arctan y \\ y' &= y(y + x), & \begin{cases} y' = 1 - x^2 y^2 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \end{aligned}$$

[30.3.2004]

Correzione compito

[31.3.2004]

Breve studio dell'equazione differenziale $y'' = -\sin y$ (moto del pendolo). Integrali curvilinei di funzioni. Teorema di Rettificabilità. Calcolare $L(\gamma)$:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [\pi/6, 5\pi/6]; \quad \gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2].$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} ds \quad \gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \in [0, 1].$$

Calcolare il baricentro della curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [\pi/6, 5\pi/6];$$

[2.4.2004]

Forme differenziali chiuse e esatte, integrale di una forma lungo una curva. In particolare dire se le seguenti forme differenziali sono chiuse e/o esatte:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -y \, dx + \sin x \, dy, & \omega_2 &= xy \, dx + \frac{x^2}{2} \, dy \\ \omega_3 &= \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y \, dx - x \, dy), & \omega_4 &= \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1} \omega_2$, $\int_{\gamma_2} \omega_2$, $\int_{\gamma_3} \omega_4$ e $\int_{\gamma_4} \omega_4$. Dove

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 1), & t &\in [0, 2]; \\ \gamma_2(t) &= (t, (t-1)^2), & t &\in [0, 2]; \\ \gamma_3(t) &= (r \cos t, r \sin t), & t &\in [\alpha, \beta]; \\ \gamma_4(t) &= (t \cos \alpha, t \sin \alpha), & t &\in [a, b]. \end{aligned}$$

[6.4.2004]

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\omega = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

e

$$\gamma(t) = ((2 + 6 \cos t) \sin t, 12 + 9 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fare lo stesso quando

$$\gamma(t) = (1 + t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [-1, 1].$$

[6.4.2004]

Calcolare $\int_{\gamma_k} \omega$ dove

$$\omega = \frac{y \, dx - (x+1) \, dy}{(x+1)^2 + y^2} - \frac{y \, dx - (x-1) \, dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

e

$$\gamma_2(t) = (1 + \cos t, \sin t), \quad \gamma_3(t) = (3 + 5 \cos t, \sin t), \quad \gamma_1(t) = \left(\cos \frac{t}{2}, t^2 - 2\pi t + 2 \right).$$

Videoproiezione: visualizzazione della risoluzione numerica di problemi di Cauchy e di integrali curvilinei.

[21.4.2004]

Calcolare i seguenti integrali con entrambe le formule di riduzione (rispetto a x e rispetto a y)

$$\iint_D x^2(y-1) dx dy \quad D = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, x^2-2 \leq y \leq 2-x^2\} \quad \left[\text{soluzione: } -\frac{28}{15} \right]$$

$$\iint_D (4y^3+2xy) dx dy \quad D = \{(x, y): |x|-1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \quad \left[\text{soluzione: } \frac{2}{3} \right].$$

Calcolare il baricentro del tetraedro:

$$P = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\} \quad \left[\text{soluzione: } \frac{1}{4} \right].$$

Calcolare

$$\iint_{B_1} (x-1)^3 dx dy \quad B_1 = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1\} \quad \left[\text{soluzione: } -\frac{7}{4}\pi \right].$$

[27.4.2004]

Formula del cambiamento di variabili negli integrali multipli. Posto

$$D = [0, 1] \times [0, 1], \quad \Phi(u, v) = (u^3 + u + v, u^3 + u - v)$$

Mostrare che Φ è invertibile e calcolare

$$\iint_{\Phi(D)} (x-y) dx dy$$

utilizzando la formula di cambiamento delle variabili.

Calcolare

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} 2y^2 dx dy$$

dove

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y): x > 0, \varepsilon \leq xy \leq 1, 1 \leq y/x \leq 2\}$$

e $\varepsilon \in (0, 1)$ è un parametro fissato.

[5.5.2004]

Coordinate polari. Calcolare

$$\iint_B (x-1)^3 dx dy, \quad \iint_A \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

dove $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Calcolare

$$\iint_C x^2 dx dy$$

dove C è l'interno della “cardioide” rappresentata in coordinate polari dalla curva $\rho = 1 + \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

[12.5.2004]

Calcolare, scambiando gli integrali,

$$\int_1^2 \frac{1}{y} \int_y^2 \frac{1}{\log x} dx dy.$$

Coordinate cilindriche: calcolare

$$\iiint_C (x^2 + y^2) z dx dy dz$$

sul cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Coordinate sferiche: calcolare il baricentro di una semisfera.