

Analisi Matematica III modulo

Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

17 gennaio 2006

1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.
- (b) Determinare, se esistono, i valori massimo e minimo assunti da f sul cerchio unitario $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione.

- (a) Mostriamo innanzitutto che la funzione è continua. Infatti si ha

$$\left| \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2||y|}{x^2 + y^2} \leq |y| \rightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow 0.$$

Per studiare la differenziabilità di f calcoliamo innanzitutto le derivate parziali.

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1. \end{aligned}$$

Perché la funzione sia differenziabile deve esistere finito il seguente limite:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2y - y^3 + x^2y + y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ma tale limite non esiste, infatti per $x = 0$ la funzione vale 0, mentre per $x = y$ la funzione vale $1/\sqrt{2}$. Concludiamo quindi che la funzione $f(x, y)$ non è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

- (b) Per determinare i punti di massimo e minimo per f sul cerchio unitario, cerchiamo innanzitutto eventuali punti critici. Abbiamo già osservato che $f_y(0, 0) = -1$ e quindi $(0, 0)$ non è un punto critico. Per $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y &= \frac{(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

È facile osservare che f_x si annulla solo se $x = 0$ oppure $y = 0$, e in entrambi i casi il numeratore di f_y si annulla solo se $(x, y) = (0, 0)$ dove però sappiamo essere $f_y \neq 0$. Dunque non ci sono punti critici. Il massimo e il minimo della funzione (che devono esistere per il teorema di Weierstrass) si trovano dunque sulla frontiera $x^2 + y^2 = 1$.

Parametrizziamo la circonferenza con la curva $(\cos t, \sin t)$ e studiamo la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t \sin t - \sin^3 t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t \\ &= \cos t (\cos^2 t - 5 \sin^2 t) = \cos t (1 - 6 \sin^2 t) \end{aligned}$$

che si annulla quando $\cos t = 0$, cioè nei punti $(0, \pm 1)$ e quando $\sin^2 t = 1/6$ ovvero nei punti $(\pm \sqrt{5/6}, \pm \sqrt{1/6})$. Valutando la funzione nei 6 punti trovati

$$\begin{aligned} f(0, \pm 1) &= \mp 1, \\ f(\pm \sqrt{5/6}, \sqrt{1/6}) &= \frac{2}{3\sqrt{6}}, \\ f(\pm \sqrt{5/6}, -\sqrt{1/6}) &= -\frac{2}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

concludiamo quindi che il valore massimo assunto da f è 1 mentre il minimo è -1 .

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (x - k)^2}.$$

- (a) Dire se c'è convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$.
- (b) Dire se c'è convergenza totale sugli intervalli limitati $[a, b]$.
- (c) Dire se c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione.

(a) Posto

$$f_k(x) = \frac{1}{k + (x - k)^2}$$

osserviamo che $f_k(x)$ sono funzioni positive, e assumono valore massimo quando il denominatore assume valore minimo, cioè quando $(x - k)^2 = 0$ ovvero per $x = k$. Il valore massimo assunto è

$$M_k = f_k(k) = \frac{1}{k} \quad \text{ed essendo} \quad \sum_k \frac{1}{k} = +\infty$$

concludiamo che la serie data non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

- (b) Se ci restringiamo all'intervallo $[a, b]$ la funzione $f_k(x)$, per $k \geq b$ risulta essere crescente su $[a, b]$ e dunque avrà massimo

$$M_k = f_k(b) = \frac{1}{k + (b - k)^2}.$$

La serie $\sum_k M_k$ è asintoticamente equivalente alla serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$ e quindi è convergente. Concludiamo quindi che la serie converge totalmente sugli intervalli limitati.

- (c) Perché ci sia convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ deve essere zero il limite seguente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_x \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_x \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k + (x-k)^2}.$$

Si può osservare che valgono le seguenti stime¹:

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k + (x-k)^2} &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{N + (x-k)^2} \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N + j^2} \\ &\leq 2 \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{N + y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{N}} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{N}} \right]_{-1}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{N}} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{N}} \right] \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(x), x) > 0.$$

Dimostrare che il sistema

$$\nabla f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione.

Soluzione. Consideriamo la funzione ristretta al cerchio unitario $D = \{x: |x| \leq 1\}$. Fissato $x \in \partial D$ (ovvero $|x| = 1$) consideriamo la funzione $g(t) = f(tx)$ per $t \in [0, 1]$. Osserviamo che si ha $g'(t) = (\nabla f(tx), x)$ in particolare $g'(1) = (\nabla f(x), x) > 0$. Questo significa per qualche $t < 1$ si ha $g(t) < g(1)$ ovvero $f(tx) < f(x)$. Di conseguenza il punto x non può essere un punto di minimo per f su D e questo è vero per ogni $x \in \partial D$. Siccome però la funzione f è continua su D , per il teorema di Weierstrass deve esistere un minimo $x_0 \in D$. Se x_0 non sta sul bordo ∂D ne consegue che x_0 è un punto interno e quindi $\nabla f(x_0) = 0$. Dunque x_0 è la soluzione cercata. xxx

Modifiche

26 novembre 2007 aggiunta una spiegazione nella soluzione del secondo esercizio

¹Nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che $(x-k)^2 \geq \lfloor x-k \rfloor^2$ e di conseguenza si possono scalare gli indici ponendo $j = \lfloor x-k \rfloor$.