

Analisi Matematica III e IV modulo

Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

7 settembre 2006

1. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dire se f è continua e se è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + |x|^n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale e determinare gli intervalli su cui si ha convergenza uniforme.

3. Determinare tutte le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ della forma differenziale $\omega = y \, dx - x \, dy$, sulla curva $\gamma = \partial^+ D$ che percorre, in senso antiorario, il bordo del settore circolare $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x \geq |y|\}$.