

Analisi Matematica I e II modulo

Prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

24 settembre 2007

1. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(1/n).$$

2. Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$0 \leq f(x) \leq |x| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che la funzione $g(x) = xf(x)$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ e calcolare il valore della derivata $g'(x_0)$.

3. Dimostrare che

$$\log(1 + x^2) \leq \operatorname{arctg} x$$

per ogni $x \in [0, 1/2]$.

4. Verificare che la funzione

$$f(x) = \log(1 + x + e^x)$$

ammette almeno un punto di flesso.

5. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{\cos x})^2 \tan x \, dx.$$

6. Si consideri la serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ 1 - \cos \frac{1}{k} \right\}^{\alpha}.$$

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie risulta convergente. Determinare inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie risulta assolutamente convergente.