

# Analisi Matematica III modulo

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

19 dicembre 2007

1. (a) Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \boxed{\text{*****A**}}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \boxed{\text{*****B**}}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + y^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \boxed{\text{*****C**}}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \boxed{\text{*****D**}}$$

nel punto  $(0, 0)$ .

- (b) Posto  $g(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$  determinare il valore massimo assunto da  $g'(0)$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Vediamo innanzitutto la versione A. Osserviamo che  $f(x, 0) = x$  mentre  $f(0, y) = 0$ . Dunque la funzione ammette derivate parziali nel punto  $(0, 0)$  e si ha  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . Vogliamo ora dimostrare che la funzione è differenziabile in  $(0, 0)$ , cioè che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| &= \frac{|x|^3 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + x^2 y^2)} \\ &\leq \frac{|x|^3 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)} \\ &\leq x^2 + y^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque la funzione è differenziabile e di conseguenza è continua nel punto  $(0, 0)$ .

Nel caso B, dimostriamo invece che la funzione è continua e derivabile ma non differenziabile. Per la continuità è sufficiente notare che

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Le derivate parziali in  $(0, 0)$  si calcolano semplicemente osservando che  $f(x, 0) = x$  e  $f(0, y) = 0$  e dunque si ha come prima  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . La funzione non è differenziabile in  $(0, 0)$  in quanto se nel limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2+x^2y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si sostituisce  $x = y$  e ci si restringe a  $x > 0$ , si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3}{2x^2+x^4} - x}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 2x^3 - x^5}{2x^3 + x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Nella versione B la funzione non è né continua né derivabile né tantomeno differenziabile. Basta osservare che  $f(0, y) = 1$  per  $y \neq 0$  mentre  $f(0, 0) = 0$ . Dunque  $f$  non è continua e quindi non è nemmeno differenziabile. Inoltre visto che neanche la restrizione  $f(0, y)$  è continua, non esiste neanche la derivata parziale rispetto a  $y$  e quindi la funzione non è derivabile.

La versione D si risolve in maniera analoga alla versione B.

Per quanto riguarda il punto (b) osserviamo innanzitutto che  $g'(0)$  non è altro che la derivata direzionale  $D_v f(0, 0)$  rispetto alla direzione  $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Dunque se la funzione è differenziabile già sappiamo che il massimo della derivata direzionale si ha nella direzione del gradiente, e il valore massimo assunto da  $g'(0)$  è dunque  $|\nabla f(0, 0)| = |(1, 0)| = 1$  e viene assunto per  $\alpha = 0 + 2k\pi$ . Questo ragionamento si applica nel caso A. Nei casi B e D la funzione non è differenziabile e dobbiamo calcolare esplicitamente  $g'(0)$  in funzione di  $\alpha$ . Ad esempio nella versione B si ha

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^3 \cos^3 \alpha}{t^2 + t^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{t \cos^3 \alpha}{1 + t^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}$$

e dunque la derivata  $g'(0)$  vale<sup>1</sup>

$$g'(0) = \frac{\cos^3 \alpha \cdot 1 - 0 \cdot (\dots)}{1^2} = \cos^3 \alpha.$$

Chiaramente il massimo di questo valore si ha quando  $\cos \alpha = 1$  cioè per  $\alpha = 2k\pi$ . Nella versione D si trova  $g'(0) = \cos^2 \alpha \sin \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha$ . Ponendo  $s = \sin \alpha$  si ha  $g'(0) = s - s^3$ . La derivata rispetto ad  $s$  è  $1 - 3s^2$  e studiando la funzione tra  $-1$  e  $1$  si trova facilmente che assume massimo per  $s = 1/\sqrt{3}$ . Il valore massimo assunto da  $g'(0)$  è dunque  $1/\sqrt{3} - 1/(3\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$ .

Nella versione C la funzione  $g(t)$  non è derivabile se non per  $\alpha = 0$ . Dunque la domanda posta non ha senso (c'è infatti un errore di battitura nel testo assegnato).

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x + 1$$

\*\*\*\*\*A\*

nel semicerchio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$ .

$$f(x, y) = y - x^2y - y^3 + 1$$

\*\*\*\*\*B\*

nel semicerchio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$ .

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - x^3 + xy^2$$

\*\*\*\*\*C\*

nel triangolo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x, x \leq 2\}$ .

$$f(x, y) = x^2y - y^3 - 2xy + 2y^2$$

\*\*\*\*\*D\*

nel triangolo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 2\}$ .

*Soluzione.* Versione A. Sappiamo che la funzione ammette massimo e minimo in quanto è una funzione continua e il dominio è chiuso e limitato. I punti di massimo e minimo assoluto saranno o punti interni e in tal caso devono essere punti critici di  $f$ , oppure staranno sulla frontiera e dovranno quindi essere massimi o minimi per la funzione ristretta alla frontiera.

Determiniamo innanzitutto i punti critici di  $f$  interni al dominio. Si ha

$$f_x = 3x^2 + y^2 - 1, \quad f_y = 2xy$$

da cui si trova che entrambe le derivate parziali si annullano nei punti  $(0, \pm 1)$  e  $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$ . Di questi solo il punto  $(-\sqrt{3}/3, 0)$  è interno al dominio assegnato (gli altri punti sono esterni o di frontiera). Su tale punto la funzione assume il valore  $f(-\sqrt{3}/3, 0) = 1 + 2/(3\sqrt{3})$ .

La frontiera del dominio può essere suddivisa in due curve, l'arco di cerchio  $(\cos t, \sin t)$  con  $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$  e il segmento  $y = x$  con  $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ . Sull'arco di cerchio si può verificare direttamente che la funzione assume il valore costante 1, infatti si ha  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)x + 1 = 1$  se  $x^2 + y^2 = 1$ . Sul segmento  $y = x$  si ha  $g(x) = f(x, x) = 2x^3 - x + 1$ ,  $g'(x) = 6x^2 - 1$ . Dunque  $g$  ha un massimo per  $x = -1/\sqrt{6}$  e un minimo per  $x = 1/\sqrt{6}$ . Su tali punti la funzione vale  $f(\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}) = 1 \mp 2/(3\sqrt{6})$ . Gli estremi del diametro vanno pure presi in considerazione, ma già sappiamo che in tali punti la funzione vale 1 in quanto si trovano sulla circonferenza. Il massimo e minimo assoluto della funzione devono essere tra i valori presi in considerazione. Dunque il minimo assoluto è  $1 - 2/(3\sqrt{6})$  e il massimo assoluto è  $1 + 2/(3\sqrt{6})$ .

Versione B. Si procede in maniera analoga alla versione A. L'unico punto critico interno al dominio è  $(0, 1/\sqrt{3})$  su cui la funzione vale  $1 + 2/(3\sqrt{3})$ . Sulla semicirconferenza la funzione è costante 1. Sul diametro il comportamento è lo stesso del caso A. Il massimo assoluto è dunque  $1 + 2/(3\sqrt{3})$  e il minimo assoluto è  $1 - 2/(3\sqrt{6})$ .

Versione C. Il dominio è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(2, -2)$  e  $(2, 2)$ . Si procede con lo stesso metodo delle versioni precedenti. L'unico punto critico interno al dominio è  $(2/3, 0)$ , su tale punto la funzione assume il valore  $4/27$ . Per la parte di frontiera contenuta nelle rette  $y = x$  e  $y = -x$  la funzione assume il valore

<sup>1</sup>Invece che scrivere per esteso  $g'(t)$  è molto più veloce fare direttamente la sostituzione  $t = 0$  man mano che si svolge la derivata.

costante 0. Sul segmento  $x = 2, y \in [-2, 2]$  la funzione vale  $f(2, y) = y^2 - 4$  ed ha un punto di minimo in  $y = 0$ . In corrispondenza la funzione assume il valore  $f(2, 0) = -4$ . Dunque il minimo assoluto è  $-4$  e il massimo assoluto è  $4/27$ .

Versione D. Il dominio è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(2, 2)$ . Si procede come nelle versioni precedenti. L'unico punto critico interno al dominio è  $(1, 1/3)$ . In tal punto la funzione assume il valore  $-4/27$ . Sulle rette  $y = x$  e  $y = 0$  la funzione assume il valore costante 0. Sulla retta  $x = 2$  la funzione assume i valori  $f(2, y) = -y^3 + 2y^2$ . Studiando la derivata si osserva un massimo per  $y = 4/3$  su cui la funzione assume il valore  $f(2, 4/3) = 32/27$ . Il minimo assoluto è dunque  $-4/27$  il massimo assoluto è  $32/27$ .

3. Determinare, al variare del parametro  $\alpha$ , la natura (massimo/minimo/sella) del punto  $(0, 0)$  per la funzione

$$f(x, y) = (x + 2y) \sin x + \alpha(x^2 + y^2).$$

\*\*\*\*\*A

$$f(x, y) = (2x + \alpha y) \sin y + \alpha x^2 - \cos x$$

\*\*\*\*\*B

$$f(x, y) = 4y \sin x + \alpha x^2 + 5\alpha y^2 - 2\alpha xy$$

\*\*\*\*\*C

$$f(x, y) = 4y \sin x + 5\alpha x^2 + \alpha y^2 - 2\alpha xy$$

\*\*\*\*\*D

*Soluzione.* Versione A. Si ha

$$f_x = \sin x + x \cos x + 2y \cos x + 2\alpha x,$$

$$f_y = 2 \sin x + 2\alpha y,$$

$$f_{xx} = 2 \cos x - x \sin x - 2y \sin x + 2\alpha,$$

$$f_{xy} = 2 \cos x,$$

$$f_{yy} = 2\alpha.$$

Per sostituzione si verifica dunque che  $(0, 0)$  è un punto critico, in quanto annulla entrambe le derivate prime. La matrice hessiana è invece

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 + 2\alpha & 2 \\ 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

e il determinante hessiano assume il valore  $4(\alpha^2 + \alpha - 1)$ . Studiando il segno di questa quantità al variare di  $\alpha$  si trova che il determinante hessiano si annulla per i valori  $\alpha = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ . Per  $\alpha < (-1 - \sqrt{5})/2$  il determinante è positivo e la traccia è negativa. Dunque il punto  $(0, 0)$  è un massimo relativo. Per  $(-1 - \sqrt{5})/2 < \alpha < (-1 + \sqrt{5})/2$  il determinante è negativo e dunque  $(0, 0)$  è un punto di sella. Per  $\alpha > (-1 + \sqrt{5})/2$  il determinante è positivo e la traccia è positiva e dunque  $(0, 0)$  è un punto di minimo relativo.

Le versioni B, C e D si risolvono in maniera analoga. La matrice hessiana risulta essere rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & 2 \\ 2 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 - 2\alpha \\ 4 - 2\alpha & 10\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10\alpha & 4 - 2\alpha \\ 4 - 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}.$$