

# Analisi Matematica IV modulo

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

23 maggio 2008

1. Disegnare approssimativamente le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - y^4 - y^2.$$

In particolare dire per quali valori di  $c \in \mathbb{R}$  l'insieme di livello

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

è connesso e per quali è limitato.

(facoltativo) Dire se esiste una curva continua  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\gamma(0) = (0, 1/2), \quad \gamma(1) = (2, 1) \quad \text{e} \quad f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(0)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

*Soluzione.* Studiando le derivate parziali prime e seconde della funzione, possiamo determinare la presenza di due punti critici:  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  che sono rispettivamente un massimo locale e un punto di sella. I corrispondenti valori della funzione sono  $f(0, 0) = 0$ , e  $f(1, 0) = -1$ . Attorno al punto  $(0, 0)$  (che è un punto isolato dell'insieme di livello  $L_0$ ) gli insiemi  $L_c$  con  $c < 0$  formano delle curve chiuse di forma approssimativamente ellittica. Attorno al punto di sella  $(1, 0)$  le curve di livello saranno approssimativamente delle iperboli. L'insieme di livello  $L_{-1}$  avrà in questo punto sarà formato da due curve che si incrociano a "X". Ogni insieme di livello è limitato a sinistra, in quanto se si avesse  $x \rightarrow -\infty$ , si avrebbe  $f(x, y) \rightarrow -\infty$  e questo non può accadere su un insieme di livello. Inoltre gli insiemi di livello sono simmetrici rispetto all'asse delle  $x$ , in quanto  $f(x, y) = f(x, -y)$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$  si osserva che deve essere  $y \rightarrow \pm\infty$  e si verifica facilmente che ogni insieme di livello è illimitato a destra. Visto che  $f(x, 0)$  assume tutti i valori reali, ogni insieme di livello incontra l'asse delle  $x$ , e quindi nessun insieme di livello è vuoto.

Si può quindi osservare che per  $c > 0$  i livelli  $L_c$  hanno una forma simile a parabole, con asse  $y = 0$ , concavità verso destra e vertice in  $(x, 0)$  con  $x > 3/2$ . Per  $c = 0$  il livello  $L_0$  ha un punto isolato in  $(0, 0)$ , e una "specie" di parabola con vertice  $(3/2, 0)$  rivolta verso destra.

Per  $-1 < c < 0$  i livelli hanno due componenti connesse. Una curva chiusa intorno al punto  $(0, 0)$  (tipo ellisse), e una curva illimitata tipo parabola, con vertice in  $(x, 0)$ ,  $1 < x < 3/2$  e concavità a destra.

Per  $c = -1$  l'insieme di livello è a forma di "cappio" con una singolarità in  $(1, 0)$ .

Per  $c < -1$  i livelli racchiudono entrambi i punti critici, formando una curva con una strozzatura per  $x = 1$ .

In definitiva nessun livello è limitato, e i livelli  $L_c$  con  $c \leq -1$  oppure  $c > 0$  sono connessi.

Supponiamo ora di avere una curva  $\gamma$  con le proprietà indicate nel testo. Osserviamo che  $f(\gamma(0)) = -5/16$  e i punti  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$  si trovano in due componenti connesse distinte del sopralivello  $\{f \geq -5/16\}$ . Dunque  $\gamma$  non può essere una curva continua.

In alternativa si può osservare che posto  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  la componente  $x(t)$  è una funzione continua con  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 2$ . Dunque ci dovrà essere un valore  $\bar{t}$  per il quale  $x(\bar{t}) = 1$ . Ma  $f(1, y)$  assume valore massimo  $-1$  per  $y = 0$  e dunque  $f(\gamma(\bar{t})) \leq -1 < f(\gamma(0))$ .

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x + x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire se  $\omega$  è chiusa e se è esatta. Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$  sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(4t), \sin(3t)), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

*Soluzione.* Posto

$$\omega_1 = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}, \quad \omega_2 = x^2 dy$$

osserviamo che vale  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Si verifica facilmente che la forma differenziale  $\omega_1$  è chiusa, mentre  $\omega_2$  non lo è. Siccome la somma di forme chiuse è chiusa, possiamo concludere che la forma  $\omega$  non è chiusa e di conseguenza non è esatta.

Per additività sappiamo che vale

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 - \int_{\gamma} \omega_2$$

e calcoleremo quindi separatamente i due integrali.

La curva  $\gamma$  non è chiusa, ma ha estremi  $\gamma(0) = (1, 0)$  e  $\gamma(\pi/2) = (1, -1)$ . Con un rapido studio di funzione si osserva che per  $t \in [0, \pi/2]$  la curva “gira” attorno all’origine in senso antiorario. Consideriamo dunque una nuova curva formata da due tratti:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\gamma_2(t) = (1, t), \quad t \in [-1, 0].$$

Osserviamo che la curva  $\gamma + \gamma_2 - \gamma_1$  è una curva chiusa che non si avvolge attorno all’origine. Essendo  $\omega_1$  chiusa possiamo quindi inferire che

$$\int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1 - \int_{\gamma_1} \omega_1 = 0$$

da cui

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 - \int_{\gamma_2} \omega_1.$$

Questi ultimi due integrali sono molto semplici da calcolare e si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = -2\pi, \quad \int_{\gamma_2} \omega_1 = -\frac{\pi}{4}$$

da cui

$$\int_{\gamma} \omega_1 = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7}{4}\pi.$$

Ci rimane da calcolare

$$\int_{\gamma} \omega_2 = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(4t) \cos(3t) dt.$$

Applicando la formula di bisezione abbiamo:

$$\cos^2(4t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(8t)$$

da cui

$$\cos^2(4t) \cos(3t) = \frac{1}{2} \cos(3t) + \frac{1}{2} \cos(8t) \cos(3t)$$

e utilizzando le formule di prostaferesi<sup>1</sup> troviamo

$$2 \cos(8t) \cos(3t) = \cos(11t) + \cos(5t)$$

da cui

$$\cos^2(4t) \cos(3t) = \frac{1}{2} \cos(3t) + \frac{1}{4} \cos(11t) + \frac{1}{4} \cos(5t).$$

Dunque l'integrale cercato è

$$\int_{\gamma} \omega_2 = \frac{23}{55}$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \omega = -\frac{7}{8}\pi - \frac{23}{55}.$$

3. Calcolare l'area della regione di piano

$$C = \{(x, y) : y \leq 2 - x^2, y \geq x\} \cup \{(x, y) : x \leq 2 - y^2, y \leq x\}.$$

Calcolare inoltre l'integrale

$$\iint_C \frac{y-x}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

*Soluzione.* La regione  $C$  a forma “di cuore”, è formata dalle due parti simmetriche rispetto alla retta  $y = x$

$$C_1 = \{x \leq y \leq 2 - x^2\}, \quad C_2 = \{y \leq x \leq 2 - y^2\}.$$

---

<sup>1</sup>Ma il modo più immediato per trovare queste formule si ha utilizzando la formula di Gauss:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  da cui

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \cos^2(4t) \cos(3t) &= \frac{1}{8} (e^{4it} + e^{-4it})^2 (e^{3it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{8it} + e^{-8it} + 2) (e^{3it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{11it} + e^{5it} + e^{-5it} + e^{-11it} + 2e^{3it} + 2e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos(11t) + 2 \cos(5t) + 4 \cos(3t)). \end{aligned}$$

Dallo studio delle soluzioni di  $x = 2 - x^2$  si osserva che le variabili  $x$  (e  $y$ ) variano tra  $-2$  e  $1$ .

l'intersezione di queste due regioni è contenuta nella retta  $y = x$  e quindi ha area nulla. Si ha dunque  $|C| = |C_1| + |C_2| = 2|C_1|$  (dove con  $|\cdot|$  denotiamo l'area di una regione di piano).

Utilizzando le formule di riduzione si ha

$$\begin{aligned} |C_1| &= \int_{-2}^1 \left[ \int_x^{2-x^2} dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^1 2 - x^2 - x dx = \left[ 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

da cui  $|C| = 9$ .

Per quanto riguarda l'integrale della funzione

$$f(x, y) = \frac{y - x}{1 + x^2 + y^2}$$

osserviamo che si ha  $f(y, x) = -f(x, y)$  e questo significa che la funzione è antisimmetrica rispetto alla retta  $y = x$ . Dunque si ha

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f = \int_{C_1} f - \int_{C_1} f = 0.$$

Per avere conferma diretta possiamo anche fare il calcolo esplicito con le formule di riduzione e scambiare i nomi delle variabili (cosa che non cambia il valore degli integrali)

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^1 \left[ \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^1 \left[ \int_y^{2-y^2} f(y, x) dx \right] dy \\ &= - \int_{-2}^1 \left[ \int_y^{2-y^2} f(x, y) dx \right] dy \\ &= - \int_{C_2} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$