

Analisi Matematica 2

Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

7 giugno 2010

1. Considerata la funzione $f: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x - \log y)^2 + (y - 2)^6 - 6(y - 2)^4$$

- (a) determinare i punti di massimo o di minimo relativo per f su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$;
 - (b) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(0, 1)$ nella direzione della retta $x - y + 1 = 0$ nel verso delle y crescenti.
2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = x \operatorname{arctg}(kx).$$

- (a) Determinare il limite puntuale;
 - (b) studiare la convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.
3. Disegnare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x \log y}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di $y_0 \in (0, +\infty)$. In particolare

- (a) dimostrare che le soluzioni massimali sono funzioni pari;
 - (b) dire per quali valori di y_0 la soluzione ha esistenza globale.
4. Calcolare, per $Q = [0, 1]^2$,

$$\iint_Q (x - y) \sin(xy) \, dx \, dy.$$