

Analisi Matematica 2 e Complementi

Soluzioni scheda n. 2

Ingegneria, a.a. 2009-2010

21 dicembre 2009

1. La misura dell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^4 \leq 1\}$$

è: **(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** $\frac{4}{3}$, **(D)** $\frac{3}{4}$.

Soluzione. L'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle x e all'asse delle y . Nel primo quadrante l'insieme coincide con il sottografico della funzione $x = y^2$ (rispetto all'asse delle y). Dunque l'area di un quarto di A è data dall'integrale $\int_0^1 y^2 dy = 1/3$. L'area totale è dunque $4/3$ e la risposta esatta è la **(C)**.

2. Calcolare l'integrale

$$\iint_Q x^2 y \, dx \, dy$$

sul quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Il risultato è **(A)** 0, **(B)** $\frac{1}{6}$, **(C)** 1, **(D)** $\frac{1}{2}$.

Soluzione. Si può usare la formula di riduzione sui rettangoli:

$$\begin{aligned} \iint_Q x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

La soluzione corretta è quindi **(B)**.

3. Il determinante Jacobiano $|\det D\varphi|$ della trasformazione $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x^2, xy)$ è **(A)** $|x^3 y|$, **(B)** $|2x^2 - y^2|$, **(C)** y^2 , **(D)** $2x^2$.

Soluzione.

$$|\det D\varphi| = \left| \det \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \right| = |2x^2| = 2x^2.$$

La risposta giusta è quindi **(D)**.

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} xy \, ds \quad \text{dove } \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \, t \in [0, \pi].$$

Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** -1, **(D)** π .

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy \, ds &= \int_0^{\pi} \cos t \sin t |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^{\pi} \cos t \sin t \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

La risposta corretta è $\frac{1}{2}$ quindi **(A)**.

5. La forma differenziale

$$\omega = \sin y \, dx + x \cos y \, dy$$

è **(A)** né chiusa né esatta, **(B)** chiusa ma non esatta, **(C)** esatta ma non chiusa, **(D)** chiusa ed esatta.

Soluzione. Posto $a(x, y) = \sin y$, $b(x, y) = x \cos y$ dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y} &= \cos y \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= \cos y. \end{aligned}$$

Dunque la forma è $\frac{1}{2}$ chiusa. Siccome la forma ω è $\frac{1}{2}$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ cioè $\frac{1}{2}$ su un rettangolo, la forma è $\frac{1}{2}$ anche esatta. Dunque **(D)**.

6. Si consideri il campo vettoriale

$$\xi(x, y, z) = (x^2 + y, x - y, z).$$

Il rotore di ξ è: **(A)** (0, 0, 0), **(B)** (2x, -1, 1), **(C)** (1, -1, 0), **(D)** (x², 0, 0).

Soluzione. Usiamo la formula

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \xi &= \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right) e_3 \\ &= (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

La risposta giusta è $\frac{1}{2}$ quindi **(A)**.

7. Calcolare l'integrale di linea $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\omega = x \, dx + y \, dy, \quad \gamma(t) = (2t^3 - t, t^5 - t^2), \quad t \in [0, 1].$$

Il risultato è: **(A)** -1 , **(B)** 0 , **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** 1 .

Soluzione. La forma ω è chiusa e quindi esatta. Dunque possiamo calcolare l'integrale su un'altra curva con gli stessi estremi $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1) = (1, 0)$. Ad esempio posto $\eta(x) = (x, 0)$ si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

La soluzione è **(C)**.

8. L'area della superficie parametrizzata da $\varphi(u, v) = (u, v, v)$ con $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2]$ è: **(A)** π , **(B)** 2 , **(C)** $2\sqrt{2}$, **(D)** $\frac{1}{2}$.

Soluzione. Si ha

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$J_{D\varphi} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

L'area della superficie è quindi $\sqrt{2}$ volte l'area del dominio $[0, 1] \times [0, 2]$ ovvero $2\sqrt{2}$. Risposta **(C)**.

9. Calcolare

$$\iint_B x^2 - y^2 \, dx \, dy$$

dove $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$. Il risultato è: **(A)** 0 , **(B)** $-\pi$, **(C)** π , **(D)** $\frac{\pi}{3}$.

Soluzione. Si ha

$$\iint_B x^2 - y^2 \, dx \, dy = \iint_B x^2 \, dx \, dy - \iint_B y^2 \, dx \, dy = 0$$

in quanto il dominio B è invariante rispetto alla simmetria $(x, y) \rightarrow (y, x)$ e quindi $\iint_B x^2 = \iint_B y^2$. Risposta **(A)**.

10. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z \in [0, 1]\}$. Calcolare

$$\int_{\partial^+ \Omega} \xi \cdot \nu_{\Omega} \, d\sigma$$

dove $\xi(x, y, z) = (x, y, z)$. Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** 6π , **(C)** $2\sqrt{2}\pi$, **(D)** 12π .

Soluzione. Utilizziamo il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial+\Omega} \xi \cdot \nu_{\Omega} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi = \int_{\Omega} 3 = 3|\Omega| = 6\pi.$$

Risposta **(B)** .

11. L'area della regione piana racchiusa dalla curva (data in coordinate polari) $\rho(\theta) = \sqrt{1 + \cos \theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, è: **(A)** 1, **(B)** π , **(C)** $\sqrt{\pi}$, **(D)** $\sqrt{2}$.

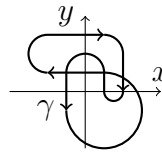
Soluzione. L'area di una curva in coordinate polari si può calcolare con la formula:

$$\int \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} [\theta + \sin \theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} 2\pi = \pi.$$

Risposta **(B)** .

12. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\omega = \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2}$$



e γ è la curva rappresentata in figura. Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** -2π , **(C)** 2π , **(D)** 4π .

Soluzione. La forma si scrive come somma:

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

La seconda forma $\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ è esatta e quindi il suo contributo nullo su ogni percorso chiuso. La prima forma $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ è chiusa ma non esatta e sappiamo che per ogni avvolgimento attorno all'origine in senso antiorario il suo contributo è pari a 2π . La curva in figura compie un giro in senso antiorario, dunque il suo integrale è proprio 2π . Risposta **(C)** .