

Analisi Matematica 2 e Complementi

Prova scritta n. 1

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

5 giugno 2010

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = x^2 \operatorname{arctg}(kx).$$

Trovare il limite puntuale. Dimostrare che su tutto $\mathbb{R}$ non c'è convergenza uniforme. Dimostrare che c'è convergenza uniforme sugli intervalli limitati $[-M, M]$.

2. Dopo aver disegnato l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

trovare il valore massimo e minimo assunti su D dalla funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^3.$$

3. Disegnare sul piano complesso la curva

$$\gamma(t) = \sin t - i \sin(2t), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

e calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{4z^2 - 1} dz.$$

4. Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) + y''(t) = t^2 \\ y''(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare

$$\int_0^{\infty} e^{-t} y(t) dt.$$