

Analisi Matematica I – CdL Fisica e Astrofisica
Quarto appello - 16 Giugno 2014

Esercizio 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme con le seguenti proprietà:

- (i) $x \in A \Rightarrow -\frac{x}{2} \in A$,
- (ii) $x \in A \Rightarrow -x \notin A$,
- (iii) $2014 \in A$.

Dimostrare che

- (a) $0 \notin A$,
- (b) $0 \in \partial A$,
- (c) ∂A è un insieme infinito (facoltativo).

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2} dx, \quad \int_2^\infty \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta} \log(1+2^n).$$

Esercizio 4. Al variare del parametro reale positivo a si consideri la funzione

$$f_a(x) = x^a \log(x)$$

1. Provare che l'estremo superiore di f_a è $+\infty$;
2. Provare che f_a ammette minimo e che esiste un unico punto di minimo;
3. Detto m_a il minimo di f_a ed x_a l'unico punto di minimo di f_a calcolare, se esistono,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} m_a; \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} m_a; \quad \lim_{a \rightarrow \infty} x_a; \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} x_a.$$