

Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

PRIMA PROVA INTERCORSO: SOLUZIONI (9 Novembre 2015)

1. 1a) Scrivere la negazione della proposizione “Tutti gli studenti in Fisica fanno passeggiate in montagna oppure sono lettori di fantascienza, e tutti gli studenti in Matematica sanno suonare uno strumento musicale oppure amano il genere *graphic novel* (romanzi a fumetti, semplificando).
(Naturalmente, non è sufficiente scrivere “Non è vero che ...”)

- 1b) Determinare gli estremi superiore ed inferiore dell’insieme

$$A = \{2^{(-n)^n+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

specificando se essi sono, rispettivamente, massimo e minimo.

2. Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

- 2a) Dimostrare che per $\alpha = 4/5$ si ha $a_n = \frac{8 + 2^{2n+1}}{16 + 2^{2n}}$;

- 2b) per $\alpha = 2015$ calcolare il limite della successione a_n ;

- 2c) per $\alpha = 1/3$ calcolare il limite della successione a_n ;

- 2d) dimostrare che se $a_{2015} = 1/2$ allora $\alpha = 1/2$.

3. Data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 + 3x - 7$, si chiede di

- 3a) dimostrare che f è bigettiva;

- 3b) calcolare $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y + 3}$;

- 3c) determinare β in modo tale che $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^\beta} = 1$.

4. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$, e siano A e B i punti di intersezione della retta tangente al grafico G_f di f , in un suo punto P_0 , con gli assi coordinati (con l’asse x e l’asse y , rispettivamente). Stabilire se esiste un punto che rende massima l’area del triangolo OAB (nel caso, determinarlo).

Esercizio 2. Per il punto 2a) possiamo applicare il principio per induzione. Ponendo $n = 1$ dobbiamo verificare che valga

$$\frac{4}{5} = \frac{8 + 2^{2+1}}{16 + 2^2}$$

mentre, per il passo induttivo, dobbiamo mostrare che

$$\frac{8 + 2^{2(n+1)+1}}{16 + 2^{2(n+1)}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{\frac{8+2^{2n+1}}{16+2^{2n}}}.$$

La verifica richiede una certa attenzione, ma non presenta difficoltà.

Per i punti successivi studiamo più in dettaglio la funzione che genera la successione. Posto $f(x) = 5/2 - 1/x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n)$. I punti fissi di f si ottengono risolvendo l'equazione $f(x) = x$. Si trova che gli unici punti fissi sono $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 2$. Osserviamo che la funzione f è crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Per il punto 2b) consideriamo l'intervallo $I = [2, +\infty)$. Tale intervallo è invariante, in quanto se $x \geq 2$ allora $f(x) \geq f(2) = 2$. Inoltre su I si ha $f(x) \leq x$ (si risolva la disequazione per verificarlo). Dunque visto che $a_1 = \alpha \in I$ scopriamo che $a_n \in I$ per ogni n e la successione a_n è decrescente. Dunque la successione converge ad un limite ℓ . Essendo f una funzione continua, il limite deve essere un punto fisso, e l'unico punto fisso nella chiusura di I è $x_2 = 2$. Dunque $a_n \rightarrow 2$.

Per il punto 2c) osserviamo che se $a_1 = \alpha = 1/3$, allora $a_2 = 5/2 - 1/a_1 = -1/2$ e $a_3 = 5/2 - 1/a_2 = 9/2$. Dunque $a_3 \in I$ e, come prima, $a_n \in I$ per ogni $n \geq 2$ e $a_n \rightarrow 2$.

Per il punto 2d) osserviamo che $f(1/2) = 1/2$ e non ci sono altri numeri x per i quali si abbia $f(x) = 1/2$ (si dimostra risolvendo l'equazione $f(x) = 1/2$). Dunque se $a_{2015} = 1/2$, sapendo che $a_{2015} = f(a_{2014})$ deduciamo che anche $a_{2014} = 1/2$. Procedendo all'indietro sugli indici della successione si arriva ad $a_1 = 1/2$ da cui $\alpha = 1/2$.

Per una dimostrazione formale si può considerare, il più piccolo intero $m \geq 1$ tale che $a_m = 1/2$. Se $m = 1$ abbiamo $\alpha = a_1 = a_m = 1/2$ e la dimostrazione è conclusa. Se fosse $m > 1$ si avrebbe $f(a_{m-1}) = a_m = 1/2$ da cui si deduce $a_{m-1} = 1/2$. Questo è assurdo perché $m - 1 < m$ e $a_{m-1} = 1/2$.

Esercizio 3. Per il punto 3a) dimostriamo che f è strettamente crescente. Infatti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow x_1^5 + 3x_1 < x_2^5 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

In generale si può osservare che la somma di funzioni strettamente crescenti rimane una funzione strettamente crescente. Una funzione strettamente crescente è anche iniettiva, quindi f è iniettiva.

Per la suriettività osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

ed essendo f una funzione continua sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ sappiamo che dovrà assumere tutti i valori compresi tra i due limiti: $-\infty$ e $+\infty$. Dunque la funzione è anche suriettiva. Abbiamo quindi mostrato che è biiettiva.

Per il punto 3b) osserviamo che nel limite possiamo fare il cambio di variabili $y = f(x)$ in quanto essendo f continua e biiettiva anche la sua inversa è continua e biiettiva, dunque per

$y \rightarrow -3$ si ha $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(-3) = 1$ (visto che osserviamo si ha $f(1) = -3$). dunque:

$$\lim_{y \rightarrow -3} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^5 + 3x - 7 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^5 + 3x - 4}.$$

Vediamo ora che quest'ultimo rapporto è una forma indeterminata perché il denominatore si annulla per $x = 1$. Questo significa però che il polinomio $x^5 + 3x - 4$ è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione di ottiene

$$\frac{x - 1}{x^5 + 3x - 4} = \frac{1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 4} \rightarrow \frac{1}{8} \quad \text{per } x \rightarrow 1.$$

In alternativa alla divisione tra polinomi si poteva operare un'altra sostituzione: $t = x - 1$ ed espandere il polinomio in t .

Per il punto 3c) facciamo lo stesso cambio di variabili, osservando che se $y = f(x) \rightarrow +\infty$ allora anche $x = f^{-1}(y) \rightarrow +\infty$ e dunque

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f(x))^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^5 + 3x - 7)^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^{5\beta}} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x^4} - \frac{7}{x^5}\right)^\beta}$$

e quest'ultimo limite può essere uguale ad 1 solamente se $5\beta = 1$ cioè $\beta = 1/5$.