

# Analisi Matematica

## Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 dicembre 2018

1. Dire per quali valori dei parametri  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}.$$

*Soluzione.* Possiamo applicare il criterio del rapporto. Si osservi che risulta:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!}{n!} &= n+1, \\ \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} &= (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \\ \frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!} &= (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n) \dots (n^2 + 1) \\ &\geq (n^2 + 1)^{2n+1} \geq n^{4n}. \end{aligned}$$

Dunque posto

$$a_n = \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}$$

risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha (n+1)^\beta \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\beta}}{n^{4n}} \sim \frac{n^{\alpha+\beta} e^\beta}{n^{4n}} \rightarrow 0$$

in quanto  $n^{\alpha+\beta} \ll n^n < n^{4n}$ . Visto che il rapporto di due termini consecutivi tende a zero la serie, a termini positivi, è convergente per ogni scelta dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .  $\square$

*Soluzione alternativa.* Ricordando che

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n \tag{1}$$

si ha

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{\alpha n}{2}} \leq (n!)^\alpha \leq n^{\alpha n}$$

$$\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \leq (n^2)! \leq (n^2)^{n^2}$$

quindi se  $a_n$  è la successione di cui dobbiamo fare la somma si ha

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^{\alpha n} n^{\beta n}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{n^{\alpha+\beta}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{n^{\alpha+\beta} (\sqrt{2})^n}{n^n} \rightarrow 0.$$

Applicando il criterio della radice possiamo concludere che la serie converge per ogni  $\alpha$  e ogni  $\beta$ .

Naturalmente invece di (1) si potevano usare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq n^n.$$

□

2. Dire per quali valori del parametro  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$$

è convergente.

*Soluzione.* Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}\right|} = \frac{|x| \sqrt[n]{\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{|x| \sqrt{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{|x| \sqrt{1}}{1 \cdot 1^0} = |x|.$$

Dunque se  $|x| < 1$  la serie converge assolutamente e quindi converge. Se  $|x| > 1$  il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge.

Per  $x = 1$  si ottiene la serie

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

che, essendo  $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  ha lo stesso carattere della serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  e dunque è divergente in quanto quest'ultima serie è una serie armonica generalizzata  $\sum \frac{1}{n^p}$  che sappiamo essere divergente quando  $p \leq 1$ .

Per  $x = -1$  si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a segni alterni, infatti posto  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  risulta  $a_n > 0$ . Possiamo applicare il criterio di Leibniz, basterà verificare che  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n$  decrescente. Che  $a_n$  sia infinitesima è chiaro in quanto abbiamo già osservato che  $a_n \sim 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ . Verifichiamo se è decrescente, cioè se vale:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Dovrebbe essere

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

cioè, elevando ambo i membri al quadrato

$$\frac{n+1}{n^2+4n+4} \leq \frac{n}{n^2+2n+1}$$

e moltiplicando per i denominatori basterà che sia

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 4n^2 + 4n$$

ovvero, dividendo per  $n$  e semplificando:

$$0 \leq n^2 + n - 1$$

che è verificata non appena  $n \geq 1$ . Dunque le ipotesi del teorema di Leibniz sono verificate (definitivamente) e, di conseguenza, possiamo affermare che per  $x = -1$  la serie converge (ma non assolutamente).  $\square$

3. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \sqrt{|1 - a_n|}. \end{cases}$$

Per i seguenti valori del parametro  $\alpha$

$$\alpha = -3, \quad \alpha = \frac{7}{16}, \quad \alpha = 2018$$

determinare, se esiste, il limite della successione  $a_n$ .

*Dimostrazione. Soluzione.* Poniamo  $f(x) = \sqrt{|1-x|}$ . I diagrammi a ragnatela si possono vedere nelle pagine seguenti:



$\alpha = -3,$



$\alpha = \frac{7}{16},$



$\alpha = 2018.$

Per  $\alpha = -3$  si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= -3, \\ a_2 &= \sqrt{|1 - (-3)|} = 2, \\ a_3 &= \sqrt{|1 - 2|} = 1, \\ a_4 &= \sqrt{|1 - 1|} = 0, \\ a_5 &= \sqrt{|1 - 0|} = 1. \end{aligned}$$

E' chiaro che, essendo  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ , per  $k \geq 2$  si avrà  $a_{2k} = 0$  e  $a_{2k+1} = 1$  e dunque la successione in questo caso non ammette limite.

Consideriamo ora il caso  $\alpha = \frac{7}{16}$ . Osserviamo che l'intervallo  $[0, 1]$  è invariante in quanto se  $x \in [0, 1]$  anche  $1 - x \in [0, 1]$  dunque  $|1 - x| = 1 - x \in [0, 1]$  e  $f(x) = \sqrt{1 - x} \in [0, 1]$ . Dunque essendo  $\alpha \in [0, 1]$  si ha  $a_n \in [0, 1]$  per ogni  $n$ . Inoltre su  $[0, 1]$  la funzione  $1 - x$  è decrescente e dunque  $f(x) = \sqrt{1 - x}$  è decrescente. Osserviamo ora che si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{16} \\ a_2 &= \sqrt{\left|1 - \frac{7}{16}\right|} = \frac{3}{4} \\ a_3 &= \sqrt{\left|1 - \frac{3}{4}\right|} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque

$$a_1 < a_3$$

essendo  $f$  decrescente si ha

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} \implies a_{2k} > a_{2k+2} \implies a_{2k+1} < a_{2k+3}$$

da cui si deduce che la successione dei termini con indice dispari è strettamente crescente mentre la successione con i termini di indice pari è

strettamente decrescente. Dunque entrambe le sottosuccessioni ammettono limite:

$$a_{2k} \rightarrow \ell, \quad a_{2k-1} \rightarrow \ell'.$$

Visto che  $a_n \in [0, 1]$  si ha  $\ell, \ell' \in [0, 1]$ .

Passando al limite nelle equazioni

$$a_{2k+2} = f(f(a_{2k})), \quad a_{2k+1} = f(f(a_{2k-1}))$$

si ottiene

$$\ell = f(f(\ell)), \quad \ell' = f(f(\ell'))$$

cioè  $\ell$  ed  $\ell'$  sono punti fissi di  $f \circ f$ . Risolviamo dunque  $f(f(x)) = x$ . Si ottiene

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} = x$$

cioè, elevando al quadrato (e ricordando che  $x \geq 0$ ) si ha

$$1 - \sqrt{1 - x} = x^2$$

portando la radice al lato destro,  $x^2$  al lato sinistro ed elevando ancora al quadrato (ricordando che  $1 - x^2 \geq 0$ ) si ha

$$(1 - x^2)^2 = 1 - x$$

cioè

$$x^4 - 2x^2 + x = 0.$$

Ora ricordiamoci che 0 e 1 sono punti fissi di  $f \circ f$  in quanto abbiamo già osservato che  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 0$ . Dunque 0 e 1 sono radici di questo polinomio che può quindi essere ridotto:

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x - 1)(x^2 + x - 1).$$

Il polinomio  $x^2 + x - 1$  ha due radici:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

La più piccola,  $x_1$  è negativa e quindi va esclusa. La più grande  $x_2$  è invece compresa tra 0 e 1 e quindi è ammissibile. Vogliamo in effetti dimostrare che  $\ell = \ell' = x_2$ . Per fare ciò osserviamo che gli intervalli  $I_1 = [0, x_2]$  e  $I_2 = [x_2, 1]$  sono invarianti per  $f \circ f$ . Infatti è facile osservare che se  $0 \leq x \leq x_2$  allora  $f(x) \geq x_2$  (perché  $f$  è decrescente) viceversa se  $x_2 \leq x \leq 1$  allora  $f(x) \leq x_2$ . Questo significa che la successione  $a_{2k-1}$  dei termini di indice dispari sta tutta in  $I_1$  in quanto  $a_1 = 7/16 \leq x_2$ . Viceversa la successione  $a_{2k}$  dei termini di indice pari sta tutta in  $I_2$ .

Ma abbiamo osservato che  $a_{2k-1}$  è crescente quindi  $\ell \in [a_1, x_2]$  mentre  $a_{2k}$  è decrescente quindi  $\ell' \in [x_2, a_2]$  da cui si può escludere che sia  $\ell$  o  $\ell'$  siano uguali a 0 o a 1. Rimane quindi l'unica possibilità  $\ell = \ell' = x_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ .

Consideriamo ora il caso  $\alpha = 2018$ . La prima cosa che vogliamo dimostrare (guidati dal diagramma a ragnatela) è che prima o poi la successione  $a_n$  deve entrare nell'intervallo  $[0, 1]$ . E' chiaro che l'intervallo  $[0, +\infty)$  è invariante in quanto  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Dunque si ha  $a_n \geq 0$  per ogni  $n$ . Osserviamo ora che sull'intervallo  $[1, +\infty)$  si ha  $f(x) = \sqrt{x-1} < x$  dunque se per assurdo si avesse  $a_n \geq 1$  per ogni  $n$  si dovrebbe avere che  $a_n$  è decrescente. Ma allora  $a_n$  avrebbe limite e il limite dovrebbe essere un punto fisso. Ma non ci sono punti fissi in  $[1, +\infty)$ . Significa quindi che esiste un  $N$  per cui risulta  $a_N < 1$  ma visto che  $[0, 1]$  è invariante significa che  $a_n \in [0, 1]$  per ogni  $n \geq N$ . Se la mia successione andasse a finire esattamente in 1 o in 0 mi ricondurrei al primo caso e quindi la successione non avrebbe limite. Possiamo però escludere che questo avvenga perché osserviamo che la regola di ricorrenza  $a_{n+1} = \sqrt{a_n - 1}$  (valida finché  $a_n \geq 1$ ) può essere invertita e ci dà:

$$a_n = 1 + a_{n+1}^2.$$

In particolare se per un certo valore  $N$  si ha che  $a_N$  è intero, allora  $a_n$  deve essere intero anche per tutti i valori precedenti  $n < N$ . Non solo:  $a_n - 1 = a_{n+1}^2$  sarebbe un quadrato perfetto. Ma 2017 non è un quadrato perfetto, quindi questa possibilità si può escludere.

Significa quindi che ad un certo punto si ha  $a_N \in (0, 1)$ . Vogliamo allora dimostrare che la successione converge comunque a  $x_2$  come nel caso precedente. Una idea per fare questo è dimostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo l'intervallo  $I_\varepsilon = [\varepsilon, \sqrt{1-\varepsilon}]$  è invariante. Se questo è vero visto che esiste  $\varepsilon > 0$  per cui  $a_N \in I_\varepsilon$  si avrà  $a_n \in I_\varepsilon$  per ogni  $n \geq N$  e quindi se  $a_n \rightarrow \ell$  (cosa che abbiamo già dimostrato nel punto precedente) dovrà essere  $\ell \in I_\varepsilon$  e quindi si conclude  $\ell = x_2$  visto che 0 e 1 non stanno in  $I_\varepsilon$ .

Sull'intervallo  $I_\varepsilon$  la funzione  $f$  è decrescente quindi per mostrare che  $I_\varepsilon$  è invariante è sufficiente mostrare che  $f(\varepsilon) \leq \sqrt{1-\varepsilon}$  e che  $f(\sqrt{1-\varepsilon}) \geq \varepsilon$ . La prima disuguaglianza è una uguaglianza (il secondo estremo dell'intervallo è stato scelto appositamente). Bisogna quindi solo controllare che sia valida la seguente disuguaglianza:

$$f(\sqrt{1-\varepsilon}) \geq \varepsilon.$$

Ma  $f(f(\varepsilon)) \geq \varepsilon$  è equivalente a  $f(\varepsilon) \geq x_2$  che a sua volta è equivalente ad  $\varepsilon < x_2$ . Quindi per ogni  $\varepsilon \in [0, x_2]$  risulta che l'intervallo  $I_\varepsilon$  è invariante per  $f \circ f$ , come volevamo dimostrare.  $\square$

3-B Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali tali che

$$\begin{aligned} a_1 &> b_1 > 0, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\ b_{n+1} &= \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}. \end{aligned}$$

Dimostrare che, per ogni  $n$ ,  $a_n > b_n$  e che

$$a_{n+1} < a_n \quad b_{n+1} > b_n$$

e calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

*Soluzione.* Abbiamo  $a_1 > b_1$ . Supponiamo  $a_n > b_n$  e dimostriamo  $a_{n+1} > b_{n+1}$ . Questo è equivalente a

$$\frac{a_n + b_n}{2} > \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

cioè

$$(a_n + b_n)^2 > 4a_nb_n \iff (a_n - b_n)^2 > 0.$$

Si ha allora

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

D'altra parte

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n$$

quindi poiché  $a_{n+1} < a_n$  si ha  $b_{n+1} > b_n$ .

Esiste allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$$

dunque

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2}$$

e visto che  $a_{n+1} \rightarrow \alpha$  si ottiene  $\alpha = \beta$ .

Allora  $a_1b_1 = a_nb_n$  da cui  $\alpha\beta = \alpha^2$  quindi

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_1b_1}.$$

□