

Analisi Matematica

Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

22 febbraio 2020

1. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sin x - x \cos x}{\operatorname{tg} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x \right) \cdot \operatorname{arctg} \cos x}.$$

Soluzione. Ricordiamo gli sviluppi delle funzioni elementari coinvolte:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \operatorname{tg} x &= x + o(x)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} \sin x &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + o(\sin^5 x) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3}{3} + \frac{(x + o(x))^5}{5} + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^5)}{3} + \frac{x^5 + o(x^5)}{5} + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + o(x^5)\end{aligned}$$

e

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$$

poi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x\right) &= \operatorname{tg}\left(-\frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{x^5}{120} + o(x^5)\end{aligned}$$

infine

$$\operatorname{arctg}(\cos x) = \operatorname{arctg}(1 + o(1)) = \frac{\pi}{4} + o(1).$$

Quindi il limite richiesto è uguale a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + o(x^5)}{\left(-\frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} + o(1)\right)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{-\frac{\pi x^5}{480} + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{-\frac{\pi}{480} + o(1)} = -\frac{160}{\pi}.\end{aligned}$$

□

2. Data la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{n^2}} + \ln \cos \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \right)^\alpha$$

dimostrare che, per n_0 sufficientemente grande, la serie è ben definita. Studiarne poi, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta.

Soluzione. La serie si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha$$

con

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right), \quad f(x) = e^{(x^2)} + \ln \cos x - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ricordando gli sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\ln \cos x &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

si osserva che la funzione $f(x)$ è definita in un intorno di 0 e per $x \rightarrow 0$ si ha:

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \left(1 - \frac{-x^2}{2} + \frac{3x^4}{8}\right) + o(x^4) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{3}{8}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{x^4}{24} \cdot (1 + o(1))\end{aligned}$$

In un opportuno intorno di 0 l'espressione $1 + o(1)$ è positiva, dunque esiste $\varepsilon > 0$ tale che per $x \in (0, \varepsilon]$ la funzione è definita e si ha $f(x) > 0$. Posto $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ per ogni $n \geq n_0$ risulta che a_n è ben definita e positiva e dunque $(-1)^n a_n^\alpha$ è ben definita.

Sempre dallo sviluppo di Taylor di f si deduce che

$$f(x) \sim \frac{x^4}{24} \quad \text{e} \quad a_n \sim \frac{1}{24 \cdot n^4}$$

da cui

$$|(-1)^n a_n^\alpha| = a_n^\alpha \sim \frac{1}{24^\alpha \cdot n^{4\alpha}}.$$

Sappiamo che la serie $\sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$ converge se e solo se $4\alpha > 1$ e dunque, per il criterio di confronto asintotico, la serie data converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$.

Per quanto appena osservato, se $\alpha \leq 0$ i termini della serie non sono infinitesimi e dunque la serie non può convergere neanche semplicemente. Se invece $\alpha > 0$ la serie è infinitesima e a segni alterni e abbiamo quindi speranza di poter applicare il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. E' sufficiente verificare che a_n^α è decrescente, almeno definitivamente. Affinché a_n^α sia decrescente è sufficiente mostrare che a_n lo è. Ma visto che $a_n = f(1/n)$ basta mostrare che f è crescente in un intorno destro di 0. Per ottenere ciò basta mostrare che la derivata $f'(x)$ è positiva in un intorno destro di 0. Sapendo che il polinomio di Taylor di f' è la derivata del polinomio di Taylor di f possiamo affermare che risulta

$$f'(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} \cdot (1 + o(1))$$

ed è chiaro che per x sufficientemente piccolo si ha $1 + o(1) > 0$ e quindi $f'(x) > 0$.

Dunque se $\alpha > 0$ si applica il criterio di Leibniz e la serie converge semplicemente. $\square$

3. Si consideri la funzione $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 3)$.

- (a) Dopo aver verificato che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva si consideri la funzione inversa $g(y) = f^{-1}(y)$.
- (b) Determinare $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$.
- (c) Calcolare

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y^2) - g(5y) + y}{(g(y) - 1)^2}.$$

Soluzione. Si ha $f(x) = x^3 + 2x - 3$ e $f'(x) = 3x^2 + 2$. Visto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f'(x) > 0$ dai criteri di monotonia deduciamo che la funzione f è strettamente crescente e dunque iniettiva. Visto poi che per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha $f(x) \rightarrow \pm\infty$ dal teorema dei valori intermedi (chiaramente f è continua) si deduce che f è anche suriettiva.

Se g è la funzione inversa di f , essendo $f' \neq 0$, possiamo applicare il teorema della derivata della funzione inversa per ottenere che g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Si osserva ora che se $g \in C^n$ allora il lato destro di quest'ultima uguaglianza è una funzione di classe C^n (in quanto la funzione g viene composta con la funzione $1/f'$ che è di classe C^∞). Dunque se $g \in C^n$ allora $g' \in C^n$ ovvero $g \in C^{n+1}$. Sappiamo che g è derivabile e dunque è di classe C^0 e quindi, per induzione, $g \in C^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ovvero $g \in C^\infty$.

Derivando ancora si ha

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y)) \cdot g'(y)}{(f'(g(y)))^2}.$$

Si osserva ora che $f(1) = 0$ e dunque $g(0) = 1$. Dunque sostituendo $y = 0$ nelle formule precedenti si ottiene (avendo calcolato $f''(x) = 6x$)

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}, \quad g''(0) = -\frac{f''(1)g'(0)}{(f'(1))^2} = -\frac{6 \cdot \frac{1}{5}}{5^2} = -\frac{6}{125}.$$

Possiamo quindi scrivere la formula di Taylor per $y \rightarrow 0$

$$g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{y}{5} - \frac{3}{125}y^2 + o(y^2)$$

da cui si trova facilmente il limite richiesto

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y^2) - g(5y) + y}{(g(y) - 1)^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{y^2}{5} - 1 - y + \frac{3}{125}(5y)^2 + y + o(y^2)}{\left(\frac{y}{5} + o(y)\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{5}y^2 + o(y^2)}{\frac{y^2}{25} + o(y^2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{5} + o(1)}{\frac{1}{25} + o(1)} = 20.\end{aligned}$$

□