

Analisi Matematica

Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

29 aprile 2020

1. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$u'' + 2u' + u = \frac{\ln x}{e^x}$$

Soluzione. Polinomio associato

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

soluzioni dell'equazione omogenea

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Cerchiamo una soluzione della non-omogenea della forma:

$$c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x}$$

con il metodo della variazione delle costanti:

$$\begin{aligned} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(1-x) e^{-x} &= \ln x e^{-x} \end{aligned}$$

da cui

$$c_2' = \ln x, \quad c_1' = -x \ln x$$

quindi possiamo scegliere

$$\begin{aligned} c_2(x) &= x \ln x - x, \\ c_1(x) &= - \int \ln x \, dx = - \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right] \\ &= - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Ogni soluzione dell'equazione non omogenea si scrive quindi nella forma

$$\begin{aligned} & a e^{-x} + b x e^{-x} + \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) e^{-x} + (x \ln x - x) e^{-x} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 + a + b x \right) e^{-x} \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

□

2. Trovare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2(x+1)\sqrt[3]{u^2} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni di classe C^∞ . Ci sono altre soluzioni? (nel caso descriverle brevemente).

(più difficile) Determinare l'insieme

$$\{u(-2) : u \text{ soluzione del problema di Cauchy}\}.$$

Soluzione. Una soluzione di classe C^∞ è la soluzione stazionaria $u(x) = 0$. Ma visto che le ipotesi di Cauchy-Lipschitz non sono soddisfatte in un intorno dei punti della retta $u = 0$ non possiamo escludere che ci siano altre soluzioni che assumono valori diversi da zero. Dove u è diversa da zero possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $\sqrt[3]{u^2}$ per separare le variabili:

$$u' u^{-\frac{2}{3}} = 2(x+1)$$

da cui, integrando,

$$3\sqrt[3]{u(x)} = x^2 + 2x + c$$

ovvero

$$u(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + c}{3} \right)^3. \quad (1)$$

Se imponiamo $u(1) = 0$ otteniamo $c = -3$ da cui si trova una seconda soluzione di classe C^∞ :

$$u(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{3} \right)^3.$$

Scegliendo altri valori della costante c è però possibile incollare le soluzioni appena trovate con la soluzione stazionaria. La funzione (1) può essere negativa in un intorno simmetrico del punto $x = -1$ (infatti $x^2 + 2x + c$ ha come grafico una parabola di asse $x = -1$). Invece tale funzione è positiva su due semirette intorno di $-\infty$ e $+\infty$. Affinché la soluzione si annulli per $x = 1$ la parte negativa della soluzione (se c'è) deve annullarsi negli estremi di un intervallo $[-1-a, -1+a]$ con $-1+a \leq 1$. Invece la parte positiva deve annullarsi nell'estremo sinistro di un intervallo $[b, +\infty)$ con $1 \leq b \leq +\infty$ e sull'estremo destro di un intervallo $(-\infty, d]$ con $-\infty \leq d \leq -1-a$. Dunque tutte le soluzioni del problema di Cauchy possono essere scritte nella forma

$$u(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 + 2x - d^2 - 2d}{3} \right)^3 & \text{per } x < d \\ 0 & \text{per } d \leq x \leq -1-a \\ \left(\frac{x^2 + 2x - (a-1)^2 - 2(a-1)}{3} \right)^3 & \text{per } -1-a < x < -1+a \\ 0 & \text{per } -1+a \leq x \leq b \\ \left(\frac{x^2 + 2x - b^2 - 2b}{3} \right)^3 & \text{per } x > b \end{cases}$$

con $a \leq 2$, $1 \leq b \leq +\infty$, $-\infty \leq d \leq -1-a$. Il valore minimo che può assumere la funzione nel punto $x = -2$ è quello che si ottiene quando $-2 \in [-1-a, -1+a]$ con a più grande possibile cioè $a = 2$. In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{3} \right)^3 \right]_{x=-2} = -1.$$

Il valore massimo si ottiene invece quando $-2 \in (-\infty, d]$ con d più grande possibile, ovvero $a = 0$, $d = -1 - a = -1$. In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{3} \right)^3 \right]_{x=-2} = \frac{1}{27}.$$

Tutti i valori intermedi possono essere ottenuti scegliendo i parametri intermedi dunque

$$\{u(-2): u \text{ soluzione del pb. di Cauchy}\} = \left[-1, \frac{1}{27} \right].$$

□

3. Studiare, al variare del parametro $p > 0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x) \cdot \ln x}{x^p} dx.$$

Per quali $p > 0$ c'è convergenza assoluta? Per quali $p > 0$ c'è convergenza semplice ma non assoluta?

(Facoltativo) Cosa succede per $p \leq 0$?

Soluzione. L'integrale può presentare problemi solamente per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$ in quanto la funzione integranda è definita e continua su tutto l'intervallo aperto $(0, +\infty)$.

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \sim -\pi \frac{\ln x}{x^{p-1}}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale finito in un intorno di 0 se e solo se $p-1 < 1$ cioè $p < 2$. Dunque sull'intervallo $(0, 1]$ la funzione è integrabile (semplicemente e assolutamente) se e solo se $p < 2$.

Per $p \rightarrow +\infty$ la funzione cambia segno frequentemente. Per quanto riguarda la convergenza assoluta osserviamo che per $x > 1$ risulta

$$\left| \frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \right| \leq \frac{\ln x}{x^p}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale convergente in un intorno di $+\infty$ se e solo se $p > 1$. Dunque per $p > 1$ abbiamo convergenza assoluta in un intorno di $+\infty$. (e quindi anche semplicemente). Per la convergenza semplice, in analogia con il criterio di Dirichlet per le serie, possiamo provare ad integrare per parti: (se $p > 0$)

$$\int_a^{+\infty} \sin(\pi x) \frac{\ln x}{x^p} dx = \left[-\cos(\pi x) \frac{\ln x}{x^p} \right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} (-\cos(\pi x)) \frac{1-p \ln x}{x^{p+1}} dx$$

Ora osserviamo che se $p > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos(\pi x) \ln x}{x^p} = 0$$

mentre per l'integrale osserviamo che si ha ora convergenza assoluta in quanto

$$\left| -\cos(\pi x) \frac{1-p \ln x}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{p \ln x - 1}{x^{p+1}} \leq p \frac{\ln x}{x^{p+1}}$$

che notoriamente in un intorno di $+\infty$ ha integrale convergente se $p + 1 > 1$ cioè se $p > 0$.

Dunque tornando all'integrale sull'intero intervallo $(0, +\infty)$ abbiamo mostrato che per $p > 0$ si ha convergenza semplice e per $1 < p < 2$ si ha convergenza assoluta.

Per dimostrare che per $0 < p \leq 1$ non si ha convergenza assoluta basta verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{|\sin(\pi x)| \ln x}{x^p} dx = +\infty.$$

Ma osserviamo che

$$\int_1^n \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx$$

e, d'altra parte,

$$\int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln(k)}{(k+1)^p} dx = \frac{\ln k}{(k+1)^p} \int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

e noi sappiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{(k+1)^p} = +\infty$$

diverge se $0 < p \leq 1$. Dunque anche il nostro integrale è assolutamente divergente se $0 < p \leq 1$.

Se $p \leq 0$ osserviamo che la funzione integranda non è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Questo è un indizio, ma non una prova, che l'integrale in tal caso non sia convergente. Per dimostrarlo procediamo in maniera simile a quanto fatto in precedenza. Osserviamo che posto

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} dx$$

se fosse $F(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow +\infty$ allora si dovrebbe certamente avere

$$|F(k+1) - F(k)| \rightarrow |\ell - \ell| = 0, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Ma la funzione $\sin(\pi x)$ ha segno costante su $[k, k+1]$ dunque per $p \leq 0$ si ha

$$\begin{aligned} |F(k+1) - F(k)| &= \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)| \frac{\ln x}{x^p} dx \\ &\geq \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)| \frac{\ln(k)}{(k+1)^p} dx \\ &= \frac{\ln k}{(k+1)^p} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ne consegue che l'integrale non può convergere, neanche semplicemente, se $p \leq 0$.

□