

Analisi Matematica

Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

3 giugno 2020

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$(u'(x) - 1) \cdot (\cos x - 1) = u(x) \sin x.$$

Determinare la soluzione u che soddisfa la condizione $u(\pi) = \pi$ e scriverne l'intervallo massimale di esistenza. Trovare una soluzione u definita su tutto l'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$

2. Si consideri, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{e} + 2n^2 \ln \cos \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} + \beta \tan \frac{1}{n^2} \right) \cdot n^\alpha \cdot \sin n$$

Dimostrare che per $x \rightarrow 0$ si ha:

$$e^x + 2 \frac{\ln \cos x}{x^2} - \sin x + \beta \tan x^2 = \frac{x^2}{3} + \beta x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Per quali valori di α, β il limite esiste? Quanto vale quando esiste?

3. Al variare del parametro $\alpha > 0$ si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right|^\alpha}{\exp \cos x - \exp \left(\cos x - \frac{1}{x} \right)} dx$$

Per quali α l'integrale è convergente?