

Analisi Matematica A e B

Prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

24 febbraio 2023

1. (a) Determinare il numero di soluzioni (reali positive) dell'equazione

$$(1 + \ln x)^2 = x.$$

- (b) Siano a e b rispettivamente la più piccola e la più grande delle soluzioni dell'equazione precedente. Determinare chi è più grande tra $\frac{1}{a}$ e b .

2. *Esercizio 2.* Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali la seguente serie numerica converge:

$$\sum_k \frac{1}{k^\alpha} - \sin \left[\left(\sin \frac{1}{k} \right)^\alpha \right].$$

3. *Esercizio 3.* Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctg(x^n).$$

- (a) Determinare l'insieme I dei punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste, finito, il limite puntuale:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Dimostrare che non c'è convergenza uniforme di f_n verso f su I .

- (b) Mostrare che per ogni $c \in (0, 1)$ c'è convergenza uniforme sugli intervalli $[-1 + c; 1 - c]$ e $[1 + c; +\infty)$.

- (c) Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.