

Analisi Matematica A e B

Soluzioni prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

21 maggio 2024

1. Per ogni k intero positivo si consideri la funzione

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{1-x}{1+kx^2}.$$

- (a) Determinare gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum (-1)^k f_k(x)$ converge.
- (b) Fissato k , calcolare i punti e i valori di massimo e minimo della funzione f_k .
- (c) Dire se la serie di funzioni $\sum (-1)^k f_k$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$. E su $[1, +\infty)$?

Soluzione. Osserviamo che se $x \neq 0$ si ha $f_k(x) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ mentre per $x = 0$ si ha $f_k(0) = 1$. Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum (-1)^k f_k(x)$ è che la successione $(-1)^k f_k(x)$ sia infinitesima, ossia che $f_k(x) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$. Dunque la serie non converge per $x = 0$. Fissato $x \neq 0$ osserviamo che la successione $f_k(x)$ è positiva e decrescente se $x < 1$ mentre è negativa e crescente se $x > 1$. In ogni caso si può applicare il teorema di Leibniz per dedurre che la serie $\sum (-1)^k f_k(x)$ converge.

Studiamo la funzione $f_k(x)$. Il segno, come già osservato, è positivo per $x < 1$ e negativo per $x > 1$. Per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha chiaramente $f_k(x) \rightarrow 0$, dunque l'asse delle x è un asintoto orizzontale per il grafico di $y = f_k(x)$. La derivata è

$$f'_k(x) = \frac{-(1+kx^2) - (1-x) \cdot 2kx}{(1+kx^2)^2} = \frac{kx^2 - 2kx - 1}{(1+kx^2)^2}.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado (o facendo il completamento del quadrato) si trova che $f'_k(x) > 0$ se e solo se $x > 1 + \sqrt{1+1/k}$ oppure $x < 1 - \sqrt{1+1/k}$. Dai criteri di monotonia, e dal fatto che all'infinito la funzione tende a zero, si deduce facilmente che $1 + \sqrt{1+1/k}$ è l'unico punto di minimo assoluto per la funzione mentre

$1 - \sqrt{1 + 1/k}$ è l'unico punto di massimo assoluto. In tali punti la funzione assume dunque il valore minimo e il valore massimo:

$$f_k(1 - \sqrt{1 + 1/k}) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2}$$

$$f_k(1 + \sqrt{1 + 1/k}) = \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2}.$$

Visto che la serie non converge per $x = 0$ non ci può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Dimostriamo invece che sull'intervallo $[1, +\infty)$ invece c'è convergenza uniforme (anche se, si potrebbe osservare che non c'è convergenza totale). Su tale intervallo si ha $f_k(x) < 0$. Per avere convergenza uniforme dobbiamo mostrare che

$$\sup_{x \geq 1} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k f_k(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty.$$

Ma, guardando la dimostrazione del teorema di Leibniz, sappiamo che

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k f_k(x) \right| \leq |f_{N+1}(x)|$$

e, per quanto visto prima, sappiamo anche che il valore massimo di $|f_k(x)|$ per $x \geq 1$ si ha quando $x = 1 + \sqrt{1 + 1/k}$ e vale:

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2} \rightarrow 0, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

possiamo quindi concludere che la serie converge uniformemente su $[1, +\infty)$. $\square$

2. Sia $f: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che $\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$ converga. Mostrare che:

- (a) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx < +\infty$;
 (b) esiste $C > 0$ tale che $\sqrt{x} f(x) \leq C \sqrt{x}$ per ogni $x \in (0, 1]$.

Soluzione. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio in 0. Grazie alla formula di integrazione per parti sappiamo che,

$$\int_{\alpha}^1 \sqrt{x} f'(x) dx = [\sqrt{x} f(x)]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = f(1) - \sqrt{\alpha} f(\alpha) - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Vogliamo ora passare al limite per $\alpha \rightarrow 0^+$. Il limite del lato sinistro esiste per ipotesi. Per quanto riguarda il lato destro osserviamo che essendo f non negativa anche l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ esiste (anche se potrebbe essere infinito). Per differenza si ottiene dunque che il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha)$ esiste ed è non negativo essendo f non negativa. Abbiamo quindi:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx = f(1) - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

ma il lato sinistro è finito, per ipotesi, e quindi nessuno dei due termini a destra può essere infinito, perché avendo lo stesso segno se anche solo uno dei due termini fosse infinito anche la loro somma sarebbe infinita. Dunque sono entrambi convergenti:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

e in particolare abbiamo dimostrato la richiesta (a). Ma se una funzione è continua su $(0, 1]$ e il limite per $x \rightarrow 0^+$ esiste ed è finito allora la funzione si può estendere con continuità al punto $x = 0$ e la funzione risultante dovrà essere limitata grazie al teorema di Weierstrass. Questa osservazione si applica alla funzione $\sqrt{x} f(x)$ che, essendo positiva e limitata dovrà dunque soddisfare la condizione del punto (b).

Non era richiesto, ma si può osservare che il limite di $\sqrt{x} f(x)$ deve in effetti essere uguale a zero, perché altrimenti avremmo $f(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0^+$ e l'integrale non potrebbe convergere essendo la funzione integranda asintotica a $\frac{C}{x}$.

□

3. (a) Dimostrare che la funzione $f(y) = \sqrt{|y| + 1}$ è lipschitziana.
 (b) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u| + 1}, \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Si ha

$$\left| \sqrt{|y| + 1} - \sqrt{|w| + 1} \right| = \left| \frac{|y| + 1 - |w| - 1}{\sqrt{|y| + 1} + \sqrt{|w| + 1}} \right| \leq \frac{|y - w|}{2}.$$

E dunque la funzione f è $\frac{1}{2}$ -lipschitziana.

In alternativa si può osservare che la funzione è derivabile sugli intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ e che su entrambi gli intervalli la derivata è limitata.

Dunque la funzione, che nel punto $x = 0$ è continua, risulta essere lipschitziana separatamente sugli intervalli $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$ grazie al teorema di Lagrange, e alla limitatezza della derivata. Ma, visto che i due intervalli hanno intersezione non vuota, la funzione è lipschitziana sulla loro unione, ossia su tutto $\mathbb{R}$.

Grazie all'osservazione precedente sappiamo a priori che l'equazione differenziale soddisfa il teorema di esistenza e unicità globale. Questa constatazione è rassicurante ma non realmente necessaria per svolgere il punto seguente.

Per quanto riguarda l'equazione differenziale, osserviamo che il lato destro dell'equazione è sempre non inferiore a 1. Dunque ogni soluzione u risulta essere strettamente crescente sugli intervalli in cui è definita. Se $u(x_0) = 0$ si avrà dunque che $u(x) > 0$ per $x > x_0$ e $u(x) < 0$ per $x < x_0$. Consideriamo allora separatamente l'intervallo $x \geq x_0$ dove si avrà $|u(x)| = u(x)$ dall'intervallo $x \leq x_0$ dove si avrà $|u(x)| = -u(x)$.

Per $x \geq x_0$ si ha, separando le variabili e integrando ambo i membri:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u+1}} = x + c$$

ovvero

$$2\sqrt{u+1} = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(x_0) = 0$ si trova $c = 2 - x_0$ e dunque

$$2\sqrt{u+1} = x - x_0 + 2.$$

Ricordando che in questo intervallo $u > 0$ e quindi $u + 1 > 0$, si ottiene

$$u(x) = \frac{(x - x_0 + 2)^2}{4} - 1.$$

Per $x \leq x_0$ si procede in maniera analoga ponendo $|u| = -u$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u}} = x + c$$

da cui

$$-2\sqrt{1-u} = x + c$$

e, imponendo la condizione iniziale, si trova $c = -2 - x_0$ e dunque, osservando che $1 - u > 0$, si ottiene

$$u(x) = 1 - \frac{(x_0 + 2 - x)^2}{4}.$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0+2)^2}{4} - 1 & \text{per } x \geq x_0 \\ 1 - \frac{(x_0+2-x)^2}{4} & \text{per } x \leq x_0. \end{cases}$$

□