

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

26 maggio 2025

1. Calcolare i valori massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si ha

$$f(x) = 1 - \cos^2 x + \cos^3 x = g(\cos x),$$

dove $g(t) = 1 - t^2 + t^3$ con $t \in [-1, 1]$. Dunque i valori massimo e minimo di f su tutto $\mathbb{R}$ sono gli stessi di g su $[-1, 1]$. Calcoliamo la derivata prima di g :

$$g'(t) = -2t + 3t^2 = t(-2 + 3t).$$

Dunque $g'(t)$ cambia segno in $t = 0$ e in $t = \frac{2}{3}$ e più precisamente $g'(t) \geq 0$ per $t \in [-1, 0]$ e per $t \in [2/3, 1]$ mentre $g'(t) \leq 0$ per $t \in [0, 2/3]$. Su ognuno di questi intervalli g è monotona e quindi assume valori compresi tra i valori assunti agli estremi di ciascun intervallo. Significa che i valori massimo e minimo di g su $[-1, 1]$ sono da ricercare tra i valori di g negli estremi di questi intervalli. Si ha $g(-1) = -1$, $g(0) = 1$, $g(2/3) = \frac{23}{27}$ e $g(1) = 1$. Dunque il valore massimo è 1 e il valore minimo è -1. $\square$

2. (a) Determinare i valori di $\alpha, \beta > 0$ per i quali converge l'integrale

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x^{\alpha} \cdot |\sin x|^{\beta}} dx.$$

- (b) Dire per quali dei precedenti valori di $\alpha, \beta > 0$ converge il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{1}{x^{\alpha} \cdot |\sin x|^{\beta}} dx.$$

Soluzione. Per il punto (a) osserviamo che la funzione integranda è definita e continua sull'intervallo aperto $(\pi, 2\pi)$. Per $x \rightarrow \pi^+$ si ha $|\sin x| = -\sin x \sim x - \pi$ e quindi la funzione integranda è asintoticamente equivalente a

$$\frac{1}{\pi^\alpha \cdot (x - \pi)^\beta}.$$

Notoriamente questa funzione risulta essere integrabile in un intorno di π se e solo se $\beta < 1$, indipendentemente dal valore di α . Per $x \rightarrow 2\pi^-$ si ha $|\sin x| = -\sin x \sim 2\pi - x$ e quindi la funzione integranda è asintoticamente equivalente a

$$\frac{1}{(2\pi)^\alpha \cdot (2\pi - x)^\beta}$$

che, di nuovo, è integrabile in un intorno sinistro di 2π se e solo se $\beta < 1$. Dunque, per il criterio di confronto asintotico, l'integrale dato è convergente se e solo se $\beta < 1$.

Passando al punto (b) osserviamo che posto:

$$I_k = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{1}{x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta} dx.$$

si ha

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{1}{x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta} dx = \sum_{k=1}^{n-1} I_k$$

e dunque il limite richiesto non è altro che la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} I_k.$$

Ora per $x \in (k\pi, k\pi + \pi)$ si ha

$$(k\pi)^\alpha \cdot |\sin x|^\beta \leq x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta \leq (k\pi + \pi)^\alpha \cdot |\sin x|^\beta$$

e l'integrale

$$\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{1}{|\sin x|^\beta} dx = \int_0^\pi \frac{1}{|\sin x|^\beta} dx = C$$

non dipende da k , in quanto $|\sin x|$ è periodica di periodo π . Nell'ipotesi $\beta < 1$ si ha che C è finito, come visto nel punto precedente. Dunque abbiamo

$$\frac{C}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq I_k \leq \frac{C}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

Notoriamente la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$ e la serie $\frac{1}{(k+1)^\alpha}$ è asintoticamente equivalente alla precedente e quindi converge anch'essa se e solo se $\alpha > 1$. Per il criterio del confronto anche la serie $\sum I_k$ converge se e solo se $\alpha > 1$ (e $\beta < 1$, come nel punto (a)). $\square$

3. Determinare l'intervallo (massimale) di esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 - 2u + 2, \\ u(7) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale è autonoma, quindi a variabili separabili. Osservando che $u^2 - 2u + 2 = (u - 1)^2 + 1 > 0$, possiamo dividere ambo i membri per il membro di destra ottenendo l'equazione equivalente:

$$\frac{u'}{(u - 1)^2 + 1} = 1.$$

Integrando:

$$\int \frac{u'(x)}{(u(x) - 1)^2 + 1} dx = \int 1 dx$$

e, ponendo $u = u(x)$, $du = u'(x) dx$, si ha

$$\int \frac{u'(x)}{(u(x) - 1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(u - 1)^2 + 1} du = \arctg(u(x) - 1)$$

e dunque

$$\arctg(u(x) - 1) = x + c$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale $u(7) = 2$ si trova

$$\arctg(2 - 1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 7 + c$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{4} - 7$$

e quindi

$$\arctg(u(x) - 1) = x + \frac{\pi}{4} - 7.$$

La funzione $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ è invertibile e la sua funzione inversa è $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$. Dunque si ha

$$u(x) = 1 + \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 7\right)$$

con

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} - 7 < \frac{\pi}{2}$$

da cui

$$7 - \frac{3}{4}\pi < x < 7 + \frac{\pi}{4}$$

che è l'intervallo di esistenza della soluzione. □