

Analisi Matematica A e B

Soluzioni prova scritta n. 2

Laurea in Fisica, Università di Pisa

13 giugno 2025

1. (a) Al variare di $m \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 1 = mx.$$

- (b) Si consideri la funzione $g(m) = \max\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 = mx\}$. Determinare i valori di m in cui g è continua e i valori in cui g è derivabile.
(c) Si calcoli $g'(0)$.

Soluzione. Possiamo osservare che $x = 0$ non è soluzione per alcun valore di $m \in \mathbb{R}$. Dunque, dividendo per x , otteniamo una equazione equivalente:

$$x^2 + \frac{1}{x} = m.$$

La funzione $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^-$, a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$ e a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

La derivata prima è

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

La derivata prima si annulla per $x = \bar{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, è positiva per $x > \bar{x}$ e negativa per $x < \bar{x}$. Dunque f è strettamente decrescente per $x < 0$ ed avendo limiti di segno opposto a $-\infty$ e 0^- , l'equazione ha una soluzione $x_1 < 0$ per ogni $m \in \mathbb{R}$ per il teorema dei valori intermedi.

Per $x > 0$ la funzione ha un minimo in $x = \bar{x}$ dove assume il valore

$$m_0 = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > 0.$$

Dunque per $m > m_0$ si sono due soluzioni positive $x_2, x_3 > 0$, per $m = m_0$ le due soluzioni coincidono e si ha una unica soluzione $x_2 = x_3 = \bar{x}$ nel punto di minimo, per $m < m_0$ non ci sono soluzioni positive.

Riassumendo, l'equazione ha: una soluzione per $m < m_0$, due soluzioni per $m = m_0$ e tre soluzioni per $m > m_0$.

La funzione $g(y)$ ad ogni $y \in \mathbb{R}$ associa il più grande $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione $f(x) = y$. Per $y < m_0$ l'equazione $f(x) = y$ ha una unica soluzione negativa. Dunque in questo intervallo $g(y)$ è la funzione inversa di f ristretta a $(-\infty, \tilde{x})$, dove $\tilde{x} < 0$ è il punto in cui $f(\tilde{x}) = f(\bar{x}) = m_0$. Per $y = m_0$ l'equazione ha due soluzioni una negativa e una positiva e si ha $g(m_0) = \bar{x}$. Per $y > m_0$ l'equazione ha tre soluzioni, una negativa una positiva minore di $\bar{x}$ e una positiva maggiore di $\bar{x}$. Sull'intervallo $[m_0, +\infty)$ la funzione $g(y)$ coincide dunque con la funzione inversa di f ristretta a $[\bar{x}, +\infty)$. Separatamente sui due intervalli $(-\infty, m_0)$ e $[m_0, +\infty)$ la funzione g è continua per il teorema di continuità della funzione inversa. Ma per $y \rightarrow m_0^-$ si ha $g(y) \rightarrow \tilde{x}$ mentre $g(m_0) = \bar{x} > \tilde{x}$. Dunque la funzione g ha una discontinuità a salto in m_0 .

Per $y \neq m_0$ la funzione g è anche derivabile in quanto in tali punti la funzione g assume un valore in cui f ha derivata non nulla. In particolare si ha $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$. Sappiamo che $g(0)$ è l'unica soluzione dell'equazione $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ e cioè $x^3 + 1 = 0$ ovvero $g(0) = -1$. Visto che $f'(-1) = 2(-1) - \frac{1}{(-1)^2} = -3$ si trova $g'(0) = -\frac{1}{3}$. $\square$

2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} dx.$$

Soluzione. Facendo il cambio di variabile $t = \frac{x}{n}$, $x = nt$, $dx = ndt$ si ottiene

$$n \cdot \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} dx = n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{nt} n dt = \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{t} dt}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin c}{c}$$

dove $c \in [0, \frac{1}{n}]$ è dato dal teorema della media integrale. Per $n \rightarrow +\infty$ si ha $c \rightarrow 0^+$ e quindi $\frac{\sin c}{c} \rightarrow 1$. $\square$

3. (a) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sin y}, \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

si trovi la soluzione, specificando l'intervallo I massimale di esistenza.

(b) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) \\ x'(t) = -\sin(y(t)) \\ y(0) = x(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(i) Si trovi l'intervallo J massimale di esistenza.

- (ii) Si provi che $y(t), x(t) \in (0; \pi)$.
- (iii) Si studino, e nel caso esistano si calcolino, i limiti agli estremi di J della soluzione $(x(t), y(t))$.

Soluzione. Parte (a). L'equazione differenziale non è definita se $y = 0$ o $y = \pi$, dunque dovrà essere $y(t) \in (0, \pi)$ per $t \in I$. Separando le variabili si ha:

$$y' \sin y = -\sin x$$

da cui, integrando,

$$-\cos y = \cos x + C.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, si trova $C = 0$ e quindi: $\cos y = -\cos x$. Abbiamo già osservato che $y \in (0, \pi)$ e in tale intervallo la funzione $\cos$ è invertibile e la sua inversa è $\arccos$, definita nell'intervallo $(-1, 1)$. Dunque si ha $y = \arccos(-\cos x) = \pi - x$ in quanto $\arccos(-y) = \pi - \arccos y$. L'intervallo massimale di esistenza è dunque $I = (0, \pi)$ e la funzione $y(x) = \pi - x$ è effettivamente di classe C^∞ .

Parte (b). Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali non lineari.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx}(x) = y'(t(x)) \frac{dt}{dx}(x) = \frac{\sin x(t(x))}{-\sin y(x(t))} = -\frac{\sin x}{\sin(v(x))} & x \in x(U), \\ v(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

pertanto $v(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.

Parte (c). Quindi si ha $y(t) = y(t(x(t))) = v(x(t)) = \pi - x(t)$, $t \in U$. Quindi $y' = -x' = -(-\sin y) = \sin y$ per $t \in U$.

Ma il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \phi' = \sin \phi \\ \phi(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$, e poiché l'equazione di quest'ultimo problema ha come soluzioni costanti 0 e π , per unicità, deve essere: $0 < \phi(t) < \pi$.

Quindi $\phi' = \sin \phi > 0$, e ϕ è strettamente crescente, e quindi avere limiti per $t \rightarrow +\infty$, e $t \rightarrow -\infty$. Dalla teoria si ha che la derivata deve essere allora infinitesima per $t \rightarrow \pm\infty$, da cui segue

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = 0.$$

Parte (d). La funzione $(\pi - \phi(t), \phi(t))$ per costruzione è un prolungamento C^1 a tutto $\mathbb{R}$ della soluzione $(x(t), y(t))$ che si è studiata per $t \in U$. Poiché la $(\pi - \phi(t), \phi(t))$ stessa è soluzione del problema di Cauchy $((\pi - \phi)' =$

$-\phi' = -\sin \phi$, $\phi' = \sin \phi = \sin(\pi - \phi)$, per unicità della soluzione al problema di Cauchy deve essere

$$x(t) = \pi - \phi(t), \quad y(t) = \phi(t),$$

provando così sia (ii) che (iii).

Osservazione. Il problema di Cauchy vettoriale della domanda b) si può risolvere esplicitamente. Infatti il secondo problema di Cauchy ausiliario

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

con equazione a variabili separabili, si risolve esplicitamente. Per trovare la primitiva $\int \frac{1}{\sin y} dy$, si usa la sostituzione $z = \operatorname{tg}(\frac{y}{2})$, $dy = \frac{2}{1+z^2} dz$, e poiché $\sin y = \frac{2z}{1+z^2}$, si ottiene

$$\int \frac{1}{\sin y} dy = \ln \tan\left(\frac{y}{2}\right)$$

per cui, tenendo conto della condizione iniziale, si ha $\log \tan \frac{y(t)}{2} = t$, cioè, esplicitando:

$$y(t) = 2 \operatorname{arctg} e^t, \quad x(t) = \pi - 2 \operatorname{arctg} e^t.$$

□