

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25
Università di Pisa

11 luglio 2025

1. (a) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$e^{ax} = x.$$

- (b) Sia $I = (-\infty, \frac{1}{e}]$ e sia $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che associa ad ogni $a \in I$ la più piccola soluzione dell'equazione precedente. Studiare la continuità, derivabilità e convessità della funzione g .

- (c) Calcolare il polinomio di Taylor di g del secondo ordine centrato in $a = 0$.

Soluzione. Se $x \leq 0$ non ci sono soluzioni. Dunque applicando il logaritmo ad ambo i membri troviamo l'equazione equivalente $a = \frac{\ln x}{x}$. Studiamo la funzione corrispondente

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Per $x \rightarrow 0$ si ha $f \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \rightarrow 0$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Dunque la funzione è strettamente crescente sull'intervallo $(0, e]$ ed è strettamente decrescente su $[e, +\infty)$. Si ha $f(e) = \frac{1}{e}$. Per il punto successivo ci sarà anche utile calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Si vede dunque che la funzione è concava per $x \leq e^{3/2}$ e convessa per $x \geq e^{3/2}$. L'andamento del grafico di f è quindi quello riportato in figura.

□

Se $a > \frac{1}{e}$ allora l'equazione non ha soluzione, perché $\frac{1}{e}$ è il valore massimo assunto dalla funzione. Se $a = \frac{1}{e}$ allora l'equazione ha una unica soluzione:

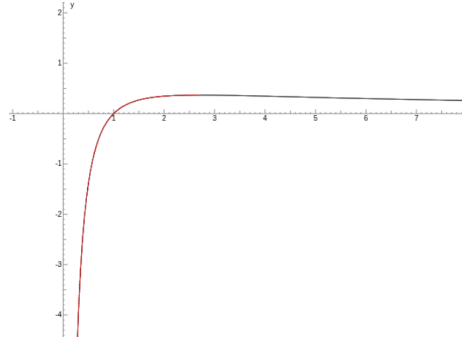


Figure 1: Andamento della funzione $f(x)$.

$x = e$. Se $0 < a < \frac{1}{e}$ allora l'equazione ha due soluzioni, una in $(0, e)$ e una in $(e, +\infty)$. Se $a = 0$ allora l'equazione ha una unica soluzione: $x = 1$. Se $a < 0$ allora l'equazione ha una unica soluzione nell'intervallo $(0, 1)$.

La più piccola delle soluzioni è quindi sempre nell'intervallo $(0, e)$ e si ottiene per valori di a compresi tra $-\infty$ e $\frac{1}{e}$.

Dunque la funzione g non è altro che la funzione inversa della funzione f ristretta all'intervallo $(0, e]$, a valori in $I = (-\infty, \frac{1}{e}]$. Su tale intervallo f è continua e strettamente crescente, dunque per il teorema di continuità della funzione inversa, anche la funzione inversa g è continua e strettamente crescente. Inoltre, per il teorema di derivazione della funzione inversa, la funzione g è derivabile in corrispondenza dei valori di f in cui la derivata di f non si annulla. Dunque g è derivabile in $(-\infty, \frac{1}{e})$, in quanto $f'(e) = 0$ e $f(e) = \frac{1}{e}$. La derivata di g si trova con la formula di derivazione della funzione inversa:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Avendo escluso il punto $y = \frac{1}{e}$, il denominatore non si annulla ed essendo $g'(y)$ espressa come composizione di funzioni derivabili, è essa stessa derivabile e si ha:

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y)) \cdot g'(y)}{(f'(g(y)))^2}.$$

Visto che $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (0, e)$, si trova immediatamente che $g''(y) > 0$ per ogni $y \in (-\infty, \frac{1}{e})$. Dunque g è convessa.

Il polinomio di Taylor di g del secondo ordine centrato in $a = 0$ è, per definizione,

$$P(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2}y^2.$$

Sappiamo che $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -3$ dunque $g(0) = 1$ e dalle formule precedenti troviamo $g'(0) = 1$ e $g''(0) = 3$. Dunque il polinomio

di Taylor è

$$P(y) = 1 + y + \frac{3}{2}y^2.$$

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - 1}{(1 - x)^n}.$$

al variare del parametro reale $x \neq 1$.

Soluzione. Se $x < 0$ possiamo scrivere $x = -|x|$ e si trova:

$$\frac{x^n - 1}{(1 - x)^n} = \left(-\frac{|x|}{1 + |x|} \right)^n + \frac{1}{(1 + |x|)^n}.$$

Notiamo che questa è una somma di due successioni geometriche entrambe di ragione minore di 1 in valore assoluto. Dunque la serie converge per ogni $x < 0$. Se $x \in [0, 1)$ si ha

$$\frac{x^n - 1}{(1 - x)^n} \rightarrow \frac{0 - 1}{0^+} = -\infty$$

dunque la serie diverge a $-\infty$.

Se $x > 1$ si ha

$$\left| \frac{x^n - 1}{(1 - x)^n} \right| = \frac{x^n - 1}{(x - 1)^n} \sim \left(\frac{x}{x - 1} \right)^n \rightarrow +\infty.$$

Significa che la serie non è infinitesima e quindi non converge. Per capire se è divergente o indeterminata dobbiamo fare attenzione al segno. Scriviamo:

$$\frac{x^n - 1}{(1 - x)^n} = (-1)^n \frac{x^n - 1}{(x - 1)^n} = \left(-\frac{x}{x - 1} \right)^n + \frac{(-1)^n}{(x - 1)^n}.$$

Si tratta della somma di due successioni geometriche, la prima è indeterminata in quanto di ragione minore di -1 e la seconda è invece convergente in quanto di ragione minore di 1 in valore assoluto. Dunque la serie risultante è indeterminata. $\square$

3. *Esercizio 3.* Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u''' - u' = x.$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare, non omogenea, del terzo ordine, a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$u(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Per trovare tutte le soluzioni della equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare. Notiamo che se $u''' = 0$ e $-u' = x$, allora u è soluzione. Dunque $u_* = -\frac{x^2}{2}$ è una soluzione particolare. Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi della forma

$$u(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2}.$$

□