

13 feb 2026 - Lez. 54

RECAP

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

$$(x, t) \in I \times (a, b)$$

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

(*)

- $f: I \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funz. continua
- $\int_a^b f(x, t) dt$ converge $\forall x \in I$
- $\forall t$ fissato $x \mapsto f(x, t)$ è derivabile
e $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ è continua in $I \times (a, b)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t) \quad \forall (x, t) \in I \times (a, b) \\ \int_a^b g(t) dt < +\infty \end{array} \right.$$

sotto queste ipotesi F derivabile e vale (*)

DIM:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

↖ è assolutamente convergente

$$\int_a^b \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$$

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \int_a^b \varphi(x_0, t) dt} \quad (\star)$$

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) & x = x_0 \\ \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} & x \neq x_0 \end{cases}$$

$(\star)$ è vero sotto le ipotesi

$$(\circledast) \quad |\varphi(x, t)| \leq g(t) \quad \forall t \in I \quad \forall x \in (a, b)$$

se $x = x_0$ $|\varphi(x_0, t)| \leq g(t)$ per ipotesi

se $x \neq x_0$ $|\varphi(x, t)| = \left| \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} \right| \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, t) \right| \leq g(t)$
 $\xi \in (x_0, x)$

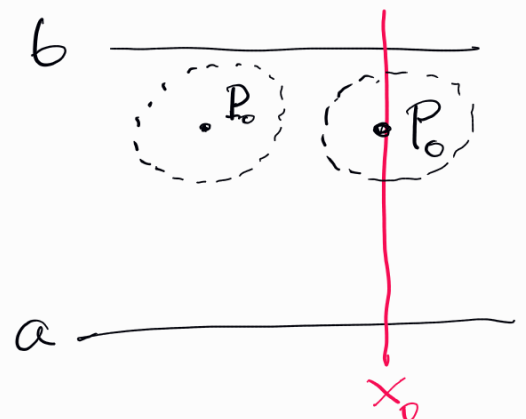
$(\circledast)$ φ è continua su $I \times (a, b)$

$$d(P, P_0) \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$P \rightarrow P_0$$

$$\varphi(P) \rightarrow \varphi(P_0)$$



$$P_0 = (x_0, t_0)$$

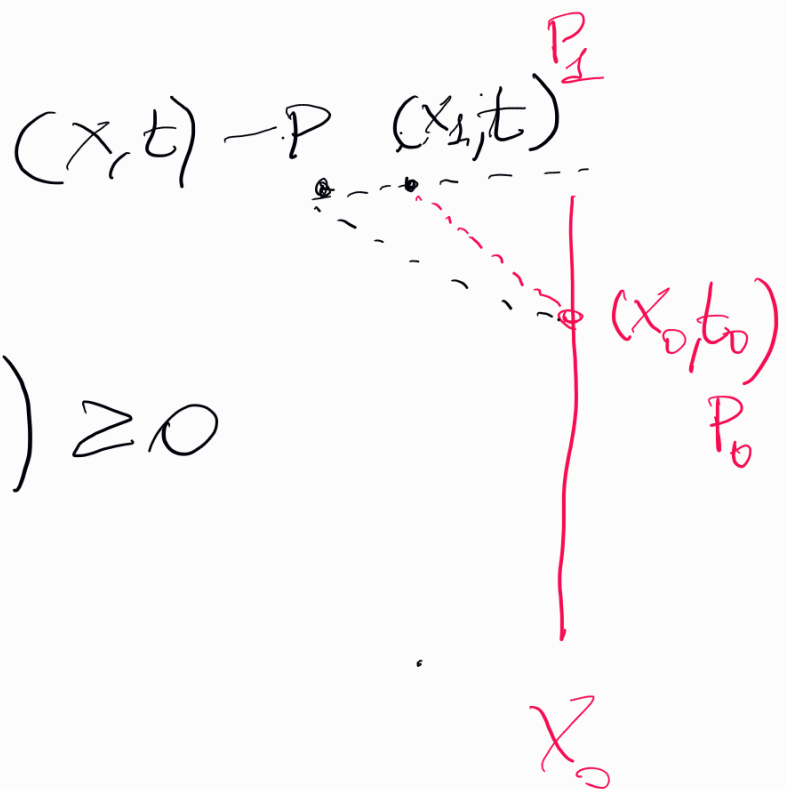
$$P = (x, t)$$

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2}$$

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) \right| \xrightarrow[P \rightarrow P_0]{?} 0$$

||

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) \right|$$



$$d(P, P_0) \geq d(P, P_1) \geq 0$$

↓
0

↓
0

continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $P_0 \Rightarrow$ cont. di φ in P_0

COME CALCOLARE L'INTEGRALE DEFINITO
QUANDO NON SI PUÒ CALCOLARE L'INTEGRALE INDEFINITO

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} e^{-xt} \right) dt \quad x \geq 0$$

$f(x, t)$

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} (-t) dt$$

$x \geq a > 0$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = \left| \sin t e^{-xt} \right| \leq e^{-at}$$

$F|_{[a, +\infty)}$ è derivabile $\forall a > 0$

$\Rightarrow F$ è derivabile $(0, +\infty)$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (-\sin t) e^{-xt} dt = \left[\cos t e^{-xt} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} (-x) dt$$

$$= -1 + x \left\{ \left[\sin t e^{-xt} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt \right\}$$

Ho ottenuto $\rightarrow$

$-J = -1 + x^2 J$

J

Quindi $J = \frac{1}{1+x^2}$ e

$$F'(x) = -J = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = -\arctan x + C$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (x > 0)$$

Q: $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)?$

se ciò è
vero
allora

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)$$


$t = k\pi + s$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(k\pi + s)}{(k\pi + s)} e^{-x(k\pi + s)} ds = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{(k\pi + s)} e^{-x(k\pi + s)} ds$$

$\sin(k\pi + s) = (-1)^k \sin s$

$a_k(x) \downarrow 0$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k(x)$$

$$S_{2n}(x) \leq F(x) \leq S_{2n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow x \rightarrow 0 \\ S_{2n}(0) \leq \sup_{x>0} F(x) \leq S_{2n+1}(0) & & \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Dato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \sup_{x>0} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ESERCIZIO GUIDATO

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad (x \geq 0)$$

- 1) Mostrare che F è ben definita e continua su $[0, +\infty)$
- 2) $F(0) = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$
- 3) $\forall a > 0$ $F|_{[a, +\infty)}$ soddisfa le ipotesi del TDSSI
- 4)* $F'(x) = -e^{-x^2} \cdot I$

$$5) -\frac{\pi}{2} = F(+\infty) - F(0) = \int_0^{+\infty} F'(x) dx = -\frac{I^2}{2}$$

$$6) I = \sqrt{\pi}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \cdot 2x dx = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$x^2 = t$ $\parallel$ $\Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

CONVERGENZA TOTALE

$$f_k: A \rightarrow \mathbb{R}$$

DEF: Dico che $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

CONVERGE TOTALMENTE su A

$$\iff \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, A} < +\infty$$

$$\|f_k\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |f_k(x)|$$

TEOREMA: Se $\sum_k f_k(x)$ è assolutamente convergente

allora la serie è convergente $\forall x \in A$

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)$$

$\forall x \in A$ $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ è assolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, A} < +\infty$$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |f_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, A}$$

coda n -esima $\nearrow$ di una serie
 convergente
 $\searrow$ uniformemente
 in x

Esercizio

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

ha RDCV R

allora la serie converge totalm.
 su $\overline{B(0, r)}$ $\forall r < R$

SPAZI METRICI

(X, d)

$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

insieme distanza

$$(d1) \quad d(x, y) \geq 0 ; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(d3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Esempi: $\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$

$$\mathbb{R}^N \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$$

$$\mathbb{S}^2 \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$$

con di geodetica



Def: Se (x_n) successione a valori in (X, d)

Dico che $x_n \rightarrow \bar{x} \in X \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(x_n, \bar{x}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Oss: Su $\mathbb{R}^N$ le distanze d_1 e d_2 danno luogo alla stessa nozione di convergenza,

DEF: Se (x_n) è una succ
a valori in X sp.
metrico

direi che

x_n è una successione di Cauchy

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon \exists N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \\ \forall n, m \geq N$$

DEF: (X, d) è COMPLETO

$\iff$ ogni successione di Cauchy
CONVERGE

Esercizio $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^N$ sono COMPLETI

PROP: Se (X, d) sp metrico
 (x_n) succ. di Cauchy

Allora

① Se $\exists n_k \uparrow +\infty$ $x_{n_k} \rightarrow \overline{x}$

Allora $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \overline{x}$

② $\exists n_k \uparrow +\infty$ tali che

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = 2^{-k}$$

Dim (1) $\varepsilon > 0$ fissato $\exists N: \begin{matrix} n > N \\ m > N \end{matrix}$ t.c. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Scelgo

$$n \geq N$$

$$n_k \geq N$$

$\nwarrow$ definit

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

$$\downarrow k \rightarrow +\infty$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon \quad n \geq N$$

Ho mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$(2) \quad n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1 \quad \forall n, m \geq n_0$$

Suppongo di avere n_k con la proprietà desiderata

“tale che” $d(x_n, x_m) < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq n_k$

$n_{k+1} > n_k$ tale che

$$|x_n - x_m| < 2^{-(k+1)} \quad \forall n, m \geq n_{k+1}$$

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}$$

perché $n_{k+1} > n_k$



A insieme

$$B(A, \mathbb{R}) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \|f\|_{\infty, A} < +\infty \right\}$$

$B(A, \mathbb{R})$ con $d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, A}$

è uno spazio metrico completo

Dim: Ogni succ di Cauchy converge

SPG (f_k) di Cauchy tale che

(*)

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{\infty, A} < 2^{-k}$$

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \text{ è CONVERGENTE}$$

perché è TOTALM.
CONVERGENTE

$$\text{Quindi } f_n(x) \Rightarrow f_1(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

CONVERGENZA UNIFORME SU A