

Esercizio 1.

Si consideri la successione $a_k = e^{-\frac{1}{2k^2}} - \cos \frac{1}{k}$.

- (a) Mostrare che esiste k_0 tale che $a_k \geq 0$ per ogni $k \geq k_0$.
- (b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{k=k_0}^{+\infty} \sin(k\pi + a_k^\alpha)$ è assolutamente convergente.
- (c) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie precedente è convergente.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t \cdot e^t} dt.$$

- (a) Dimostrare che F è ben definita e limitata su $(0, +\infty)$.
- (b) Mostrare che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (a - F(x))$ è finito.
- (c) Determinare se il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x F(x)$ esiste e in caso se è finito o infinito.