

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 62 - 4.3.2026

Teo (esistenza globale)

$$\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \begin{cases} \underline{u}'(x) = f(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad (\text{PC})$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

• f continua

$$\exists m, q \in \mathbb{R}.$$

- f localmente lipschitz
(come per $\exists!$ locale)

$$|f(x, \underline{y})| \leq m |\underline{y}| + q$$

allora il (PC) ha una soluzione

definita su tutto (a, b) . $\underline{u}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

EQUAZIONI DI ORDINE n :

$$\begin{cases} \underline{u}^{(n)}(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x), \dots, \underline{u}^{(n-1)}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = z_1 \\ \underline{u}'(x_0) = z_2 \\ \vdots \\ \underline{u}^{(n-1)}(x_0) = z_n \end{cases} \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (\forall)$$

La "traduzione" dell'eq. di ordine n

in un "sistema" di n equazioni del I ordine

l'abbiamo già vista:

$$\underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{u}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

l'equazione $(*)$ diventa un sistema del
I ordine:

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = u_3(x) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n(x) \\ u_n'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

cioè:

$$\underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x))$$

$$\underline{f}(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, \underline{y}) \end{pmatrix}$$

La condizione iniziale:

$$\begin{cases} u(x_0) = z_1 \\ u'(x_0) = z_2 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = z_n \end{cases}$$

dovendo $\underline{u}(x_0) = \underline{z}$ $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Il Problema di Cauchy del I ordine è

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{z} \end{cases}$$

Se $\underline{f}$ è sublineare cioè:

$$|\underline{f}(x, \underline{y})| \leq m |\underline{y}| + q$$

allora anche $\underline{f}$ lo è: $\underline{f}(x, \underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, \underline{y}) \end{pmatrix}$

$$\left| \underline{f}(x, \underline{y}) \right|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 + f^2(x, \underline{y})$$

$$\leq |\underline{y}|^2 + |m |\underline{y}| + q|^2$$

$$= |\underline{y}|^2 + m^2 |\underline{y}|^2 + 2mq |\underline{y}| + q^2$$

$$|\underline{f}(x, \underline{y})| \leq \sqrt{(1+m^2) |\underline{y}|^2 + 2mq |\underline{y}| + q^2}$$

$$\leq \tilde{m} |\underline{y}| + \tilde{q}$$

$$(2+m^2) |\underline{y}|^2 + 2mq |\underline{y}| + q^2 \leq \tilde{m}^2 |\underline{y}|^2 + 2\tilde{m} |\underline{y}| + \tilde{q}^2$$

$$\begin{cases} 2+m^2 \leq \tilde{m}^2 \\ 2mq \leq 2\tilde{m} \\ q^2 \leq \tilde{q}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{m} = \sqrt{2+m^2} \vee 2mq \\ \tilde{q} = q \end{cases} \quad \square$$

Abbiamo mostrato che anche le equazioni di ordine n hanno soluzione globale se f è sublineare.

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE n

IN FORMA NORMALE:

$$u^{(n)}(x) = -a_0(x) \cdot u(x) - a_1(x) u'(x) + \dots - a_{n-1}(x) u^{(n-1)}(x) + b(x)$$

$$= - \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + b(x)$$

$$u^{(n)} = - \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} + b$$

ovvero:

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b$$

termine noto

coefficienti dell'eq.

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

NON OMOG.
OMOGENEA

con $a_k = a_k(x)$ funzioni continue definite nello stesso dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

(LINEARE)

Se $b(x) = 0$ l'eq. si dice **OMOGENEA**
altrimenti l'eq. si dice **NON OMOGENEA**

$$L(u) = u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$$

$$L: C^n(A) \rightarrow C^0(A) \quad \text{lineare!}$$

$$Lu = b \quad \text{eq. NON OMOGENEA}$$

$$\rightarrow Lu = 0 \quad \text{eq. OMOGENEA (ASSOCIATA)}$$



Teorema (struttura delle soluzioni delle eq. lineari)

Siano $a_k \in C^0(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $I \neq \emptyset$

Allora ① $\text{Ker } L$ è un sottospazio vettoriale
di $C^n(I)$

$$\text{Ker } L = \left\{ u : Lu = 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{soluzioni della} \\ \text{eq. omogenea} \end{array} \right\}$$

② Inoltre $\dim \text{Ker } L = n$.

(e u^* esiste sempre)

③ Se u^* è soluzione di $Lu = b$ con $b \in C^0(I)$

allora $H = \{ u : Lu = b \}$ è un sottospazio affine

di dimensione n .

$$H = \text{Ker } L + u^*$$



(OVVERO: ogni soluzione della non omogenea si ottiene sommando a u^h una soluzione della omogenea associata).

dim

① L è lineare $L: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$.

$$L[u] = u^{(n)} + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$$

$$L[u+v] = D^n(u+v) + a_{n-1} \cdot D^{n-1}(u+v) + \dots + a_1 (u+v)' + a_0 (u+v) \quad a_k \in C^0(I)$$

$$= D^n u + D^n v + a_{n-1} D^{n-1} u + a_{n-1} D^{n-1} v + \dots + a_1 u' + a_1 v' + a_0 u + a_0 v$$

$$\quad \quad \quad = L[u] + L[v].$$

$$\begin{aligned} L[tu] &= D^n(tu) + a_{n-1} D^{n-1}(tu) + \dots + a_1 D(tu) + a_0 tu \\ &= t D^n u + t a_{n-1} D^{n-1} u + \dots + t a_1 u' + t a_0 u \\ &= t \cdot L[u]. \end{aligned}$$

$$L[0] = 0$$

L lineare.

Se $L: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$ è lineare
 sono spazi vettoriali (vali)

$\ker L$ è un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$

è un teorema di algebra lineare (GEOMETRIA).

$$\begin{aligned} u, v \in \ker L &\Rightarrow L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 \\ t \in \mathbb{R} \quad L(tu) &= tL(u) = t \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u, v \in \ker L &\Rightarrow L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 \\ t \in \mathbb{R} \quad L(tu) &= tL(u) = t \cdot 0 = 0 \end{aligned}} \right\}$$

$$\Rightarrow u+v \in \ker L, \quad tu \in \ker L.$$

② $(\dim \ker L \stackrel{?}{=} n)$ Fisso $x_0 \in I$
 $J: C^n(I) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (J \in T)$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J \text{ è lineare: } J[u+v] &= \begin{pmatrix} (u+v)(x_0) \\ \vdots \\ (u+v)^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0) + v(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) + v^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = J[u+v] \\ \text{e } J[tu] &= tJ[u] \end{aligned}$$

obiettivo

$$J: \ker L \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{è biettivo?}$$

in tal caso $\dim \ker L = n$.

• J è iniettivo?

Se $u_1, u_2 \in \ker L$, $u_1 \neq u_2 \Rightarrow J[u_1] \neq J[u_2]$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 u_1, u_2 soluzioni di $Lu=0$

$u \in \ker L$

$\begin{cases} Lu=0 \\ \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = J[u] \end{cases}$ eq. diff. lineare in forma normale
condizione di Cauchy.

Se fosse $J[u_1] = J[u_2]$ u_1, u_2 sarebbero due diverse soluzioni dello stesso problema di Cauchy. VIOLA l'unicità (Cauchy-Lipschitz).

[BIAMO per BUONO che le ipotesi di C-L globale sono soddisfatte per le eq. lineari]

• J suriettivo?

Dato $z \in \mathbb{R}^n$ $\exists u \in \ker L$ t.c. $J[u] = z$.

Cioè esiste una soluzione

del (PC) $\begin{cases} Lu=0 \\ \begin{pmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = z \end{cases}$

Vero per l'esistenza della soluzione.

③ Dato $b \in C^0(I)$. $\exists u^*$ soluzione di $Lu = b$
per il teorema di esistenza globale.

$$u = u^* + v$$

$$u \text{ risolve } L[u] = b \Leftrightarrow v \text{ risolve } L[v] = 0$$

$$\text{infatti } L[u] = L[u^* + v] = L[u^*] + L[v]$$

$$= b + L[v] = b$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ L[v] = 0. \end{array}$$

$$\{u : Lu = b\} = u^* + \{v : Lv = 0\}$$

$$= u^* + \ker L.$$

$\square$

ES

$$u'' + u' + u = 1$$

$$a_1(x) = 1$$

$$a_2(x) = 1$$

$$b(x) = 1$$

Passo 1 risolviamo l'omogenea:

$$u'' + u' + u = 0$$

Proviamo $u(x) = e^{\lambda x}$

allora $u'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$$u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$u'' + u' + u = \underbrace{(\lambda^2 + \lambda + 1)}_{=0} e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

Se λ risolve $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ $\leftarrow$ polinomio associato
allora $e^{\lambda x}$ è soluzione.

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$u_1(x) = e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} \quad u_2(x) = e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

Visto che $L[u] = u'' + u' - u$ è lineare

$u \in \text{span}\{u_1, u_2\}$ sono tutte soluzioni

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \quad \text{è sol. della omogenea.}$$

u_1 e u_2 sono indipendenti

(u_2 non è multiplo di u_1)

ho trovato uno spazio di sol. di dimensione 2.

dunque per il Teorema di struttura ho trovato tutte le soluzioni!

② Devo trovare u^* sol. della non omogenea:

$$u'' + u' - u = 1$$

$$u^*(x) = -1 \quad \text{è soluzione!}$$

Tutte le soluzioni (della non omogenea)

sono

$$u(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} - 1.$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

—