

Analisi Matematica

Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica 2025/26

28 marzo 2026

1. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{1+e^u}{1+x^2} \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Trovare la soluzione nel caso $\alpha = 0$ specificando, in particolare, l'intervallo massimale di esistenza.
- (b) Determinare i valori di α per i quali la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili. Dividendo ambo i membri per $1+e^u$ (che non si annulla mai), si ottiene l'equazione equivalente

$$\frac{u'}{1+e^u} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando ambo i membri in dx e cambiando variabile $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$, si ottiene

$$\int \frac{1}{1+e^u} du = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Risolvendo gli integrali si ottiene dunque

$$\ln \frac{e^u}{1+e^u} = \operatorname{arctg} x + C$$

ovvero

$$\ln \left(1 - \frac{1}{1+e^u} \right) = \operatorname{arctg} x + C.$$

Per il punto (a) poniamo $u(0) = 0$ ottenendo $C = -\ln 2$. Si ottiene dunque, ricavando u ,

$$u(x) = \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg} x}} - 1 \right) = \ln \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2 - e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

La soluzione è definita se $2 - e^{\operatorname{arctg} x} > 0$, ovvero se $x < \tan \ln 2$.

Per il punto (b) si osserva che in generale la condizione $u(0) = \alpha$ diventa

$$\ln \left(1 - \frac{1}{1 + e^\alpha} \right) = C$$

e la soluzione diventa

$$u(x) = \ln \left(\frac{1}{1 - e^c \cdot e^{\operatorname{arctg} x}} - 1 \right).$$

Tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ se il denominatore $1 - e^c \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$ non si annulla mai, ovvero se

$$\alpha < \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}} - 1 \right).$$

□

2. Al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 2cu' + u = x.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $u'' + 2cu' + u = 0$. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2c\lambda + 1 = 0$. Le radici di tale polinomio sono

$$\lambda_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

Osserviamo subito che $\lambda = 0$ non è mai una radice (basta osservare che il polinomio caratteristico non si annulla per $\lambda = 0$) dunque il metodo di similarità ci dice che, indipendentemente dal valore di c , una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma $u_*(x) = ax + b$. Andando a sostituire u_* nell'equazione differenziale si ottiene

$$2ca + ax + b = x$$

da cui si ricava $a = 1$ e $b = -2c$. Dunque, per ogni c , una soluzione particolare è

$$u_*(x) = x - 2c.$$

Troviamo ora tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

- (a) Se $c^2 > 1$ cioè $c < -1$ o $c > 1$, le radici sono reali e distinte. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque

$$u_0(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}.$$

Dunque la soluzione generale è

$$u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + x - 2c$$

con $\lambda_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}$.

- (b) Se $c^2 = 1$ cioè $c = -1$ o $c = 1$, le radici sono reali e coincidenti. In tal caso le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$u_0(x) = (A + Bx)e^{-cx}$$

e tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$u(x) = (A + Bx)e^{-cx} + x - 2c.$$

- (c) Se $c^2 < 1$ cioè $-1 < c < 1$, le radici sono complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2} = -c \pm i\sqrt{1 - c^2}.$$

In tal caso le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$u_0(x) = e^{-cx} (A \cos((1 - c^2)x) + B \sin((1 - c^2)x))$$

e tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$u(x) = e^{-cx} (A \cos((1 - c^2)x) + B \sin((1 - c^2)x)) + x - 2c.$$

□