

Raccolta di teoremi

Emanuele Paolini

7 marzo 2026

Il seguente testo è una raccolta incrementale di teoremi in cui mi sono imbattuto per vari motivi (principalmente per la didattica) e di cui ho voluto scrivermi la dimostrazione (o a volte solo l'enunciato). Questo testo dunque non è completo, manca di molte definizioni e di molti argomenti ma forse si estenderà in futuro (presumibilmente senza mai raggiungere la completezza). L'unica utilità che penso potrebbe avere è per consultazione (per me ha, di fatto, tale utilità).

Indice

1	Analisi Reale	5
1.1	Insiemistica	5
1.2	I numeri reali	5
1.3	I numeri complessi	6
1.4	Successioni di numeri reali	7
1.5	Teoremi sulle serie	7
1.6	Funzioni di una variabile reale	9
1.7	Uniforme continuità	14
1.7.1	Funzioni uniformemente continue, Lipschitziane, α -Hölderiane	14
1.7.2	Successioni di Cauchy	16
1.7.3	Estensioni	17
1.7.4	Modulo di continuità	18
1.8	Funzioni convesse	19
2	Topologia	21
2.1	Spazi topologici	21
2.2	Funzioni continue	24
2.3	Spazi metrici	25
2.4	Limiti	26
2.5	Retta reale estesa	28
2.6	Successioni in spazi topologici	28
2.7	Teoremi di compattezza	28
2.8	Teoremi di punto fisso	32
3	Spazi vettoriali topologici	33
3.1	Il differenziale	33
3.2	Convergenza uniforme	34
3.3	Serie e derivata discreta	35
3.4	L'esponenziale di matrici	36
3.5	Algebra lineare	38
3.6	Invertibilità locale	39
3.7	Equazioni differenziali	42
3.7.1	Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti	43
3.7.2	Equazioni differenziali lineari di ordine n	43
3.7.3	Equazioni non lineari	46
3.8	L'integrale di Lebesgue	48
3.9	Spazi L^p	52
3.10	Semi-continuità	52
3.11	Serie di Fourier	53
3.12	Trasformate di Fourier	56

Capitolo 1

Analisi Reale

1.1 Insiemistica

Proposizione 1.1.1. *Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Se $A \subset X$, $B \subset Y$, \mathcal{F} è una famiglia di sottoinsiemi di X e \mathcal{G} è una famiglia di sottoinsiemi di Y si ha:*

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $B \supset f(f^{-1}(B))$;
3. $f(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup f(\mathcal{F})$;
4. $f(\bigcap \mathcal{F}) = \bigcap f(\mathcal{F})$;

Dimostrazione. 1. Dato $x \in A$ si ha $f(x) \in f(A)$ e quindi $x \in f^{-1}(f(A))$.

D'altra parte possiamo trovare un esempio in cui l'inclusione è stretta, basta considerare $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3\}$ e f la funzione con grafico $\{(1, 3), (2, 3)\} \subset X \times Y$. Scelto $A = \{1\}$ si ha $f(A) = Y$ e quindi $f^{-1}(f(A)) = X \neq A$.

2. Sia dato $b \in f(f^{-1}(B))$. Allora esiste $a \in f^{-1}(B)$ tale che $f(a) = b$. Dunque esiste $b' \in B$ tale che $f(a) = b'$. Dunque $b = b' \in B$.

D'altra parte costruiamo un esempio in cui l'inclusione è stretta. Scegliamo $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ e f la funzione con grafico $\{(1, 2)\} \subset X \times Y$. Scelto $B = Y$ si ha $f^{-1}(B) = X$ ma $f(f^{-1}(B)) = f(X) = \{2\} \neq B$.

3. Dato $y \in f(\bigcup \mathcal{F})$ esiste $x \in \bigcup \mathcal{F}$ tale che $f(x) = y$. Inoltre esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $x \in F$. Dunque $y = f(x) \in f(F) \subset \bigcup f(\mathcal{F})$.

Dato $y \in \bigcup f(\mathcal{F})$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $y \in f(F)$. Esiste dunque $x \in F$ tale che $f(x) = y$. Chiaramente $y = f(x) \in f(F) \subset f(\bigcup \mathcal{F})$.

□

1.2 I numeri reali

Denoteremo con \mathbb{R} un insieme dotato delle operazioni $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (somma), $P: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (prodotto) e dalla relazione $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (relazione d'ordine) tale che i seguenti assiomi siano validi. Per semplicità si useranno le notazioni $x+y = S(x, y)$, $xy = x \cdot y = P(x, y)$, $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow (x, y) \in M$, $x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow (x, y) \in M \wedge x \neq y$.

1. Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x + y = y + x$, $xy = yx$ (proprietà commutativa), $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ (proprietà associativa), $x(y + z) = xy + xz$ (proprietà distributiva), $x \leq y \vee y \leq x$ (ordinamento totale), $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotonia), esistono $0, 1 \in \mathbb{R}$ tali che $0 + x = x$, $1x = x$ (esistenza degli elementi neutri).
2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in \mathbb{R}$ (denoteremo y con $-x$) tale che $x + y = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste $y \in \mathbb{R}$ (denoteremo y con $1/x$) tale che $xy = 1$ (esistenza di opposto e inverso).
3. Ogni insieme superiormente limitato ammette estremo superiore (completezza).

Per comodità scriveremo $x - y = x + (-y)$ (dove $-y$ è l'opposto di y) e se $y \neq 0$ scriveremo $x/y = \frac{x}{y} = x \cdot (1/y)$ (dove $1/y$ è l'inverso di y).

Un sottoinsieme X di \mathbb{R} si dice *induttivo* se $0 \in X$ e $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$. Il più piccolo sottoinsieme induttivo di \mathbb{R} (ovvero l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di \mathbb{R}) viene chiamato \mathbb{N} (numeri naturali).

Proposizione 1.2.1 (principio di Archimede). *Dato $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \leq n$ ovvero \mathbb{N} non è superiormente limitato.*

Dimostrazione. Se \mathbb{N} fosse superiormente limitato ammetterebbe estremo superiore $s \in \mathbb{R}$. Allora $s - 1$ non sarebbe un maggiorante, cioè esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $s - 1 \leq n$. Dunque si avrebbe $s \leq n + 1$ e quindi s non sarebbe un maggiorante. \square

Definizione 1.2.2 (intervallo). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ (o di $\overline{\mathbb{R}}$). Diremo che I è un intervallo se dati $x, y \in I$ e dato qualunque z con $x \leq z \leq y$ si ha $z \in I$.*

Gli estremi di un intervallo I sono $a = \inf I$ (estremo inferiore) e $b = \sup I$ (estremo superiore). Se I è limitato allora $a, b \in \mathbb{R}$. Gli estremi dell'intervallo (quando sono finiti) possono essere o non essere inclusi nell'intervallo. Se l'estremo inferiore (rispettivamente superiore) non è incluso nell'intervallo si dice che l'intervallo è aperto a sinistra (rispettivamente a destra). Se invece gli estremi sono inclusi nell'intervallo si dice che l'intervallo è chiuso.

Un intervallo viene quindi univocamente determinato conoscendo i suoi estremi (finiti o infiniti) e sapendo se gli estremi sono contenuti oppure no nell'intervallo. Per denotare un intervallo useremo quindi scrivere gli estremi tra parentesi quadre e separati da una virgola. A seconda dell'orientamento delle parentesi quadre gli estremi vanno inclusi o esclusi. Gli intervalli di \mathbb{R} sono dunque i seguenti: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, \emptyset .

Gli intervalli di $\overline{\mathbb{R}}$ possono anche includere i punti $+\infty$ e $-\infty$.

Se I è un intervallo, denoteremo con $\overset{\circ}{I}$ l'intervallo aperto con gli stessi estremi e con \bar{I} l'intervallo chiuso.

1.3 I numeri complessi

Esercizio 1.3.1. Trovare la lunghezza del lato del pentagono. Ovvero determinare $\sin(2\pi/5)$ e $\cos(2\pi/5)$.

Dimostrazione. I cinque vertici del pentagono inscritto nel cerchio di raggio 1 e orientato opportunamente sono le cinque soluzioni complesse dell'equazione $z^5 = 1$. Ovviamente se z è soluzione, allora $|z|^5 = |z^5| = 1$ cioè $z\bar{z} = |z|^2 = 1$.

Ovviamente 1 è soluzione e dividendo per $z-1$ si ottiene $z^5-1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$. Dobbiamo quindi trovare le quattro soluzioni di $z^4+z^3+z^2+z+1=0$. Sapendo che $z\bar{z}=1$ moltiplichiamo tutto per \bar{z}^2 ottenendo $z^2+z+1+\bar{z}+\bar{z}^2 = (z+\bar{z})^2+z+\bar{z}-1$. Con la sostituzione $w = z+\bar{z}$ si ottiene l'equazione di secondo grado $w^2+w-1=0$ che ha le due soluzioni $w = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Se z è una delle due soluzioni diverse da 1 e con parte reale positiva, il lato del pentagono è dato da $l = |z-1| = \sqrt{(z-1)(\bar{z}-1)} = \sqrt{z\bar{z}-z-\bar{z}+1} = \sqrt{2-w}$ dove w sarà la soluzione positiva di $w^2+w-1=0$. Dunque si ottiene $l = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. Per $\theta = 2\pi/5$ si ha poi $\cos\theta = \Re z = \frac{z+\bar{z}}{2} = w/2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; mentre $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. \square

1.4 Successioni di numeri reali

Teorema 1.4.1 (Bolzano-Weierstrass). *Sia (x_k) una successione limitata di numeri reali. Allora è possibile estrarre una sottosuccessione (x_{k_j}) convergente.*

Dimostrazione. Sia $[a, b]$ un intervallo che contiene tutti i termini della successione. Per induzione troveremo una sottosuccessione x_{k_j} e una successione di intervalli $[a_j, b_j]$ con le seguenti proprietà: $b_j - a_j = 2(b-a)/2^j$, $a_{j+1} \geq a_j$, $b_{j+1} \leq b_j$, $x_{k_j} \in [a_j, b_j]$ e $\{k: x_k \in [a_j, b_j]\}$ è un insieme infinito.

Per $j=1$ scegliamo $a_1 = a$, $b_1 = b$ e $x_{k_1} = x_1$. Tutti i termini della successione stanno in $[a_1, b_1]$ e si ha $b_1 - a_1 = b - a$.

Siccome per ipotesi induttiva l'intervallo $[a_j, b_j]$ contiene infiniti punti della successione x_k , allora almeno uno dei due intervalli $[a_j, (a_j+b_j)/2]$ e $[(a_j+b_j)/2, b_j]$ contiene infiniti punti della successione. Sia $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ tale intervallo e sia $k_{j+1} > k_j$ tale che $x_{k_{j+1}} \in [a_{j+1}, b_{j+1}]$. Chiaramente $a_{j+1} \geq a_j$, $b_{j+1} \leq b_j$ e $b_{j+1} - a_{j+1} = (b_j - a_j)/2$.

È poi facile verificare che la sottosuccessione x_{k_j} è convergente. Infatti $a_j \leq x_{k_j} \leq b_j$. Le due successioni a_j e b_j sono monotone dunque convergono. Essendo poi $|b_j - a_j| \rightarrow 0$ le due successioni a_j e b_j convergono allo stesso limite e quindi, per confronto, anche x_{k_j} converge a tale limite. \square

1.5 Teoremi sulle serie

Teorema 1.5.1. *Siano a_k e b_k due successioni. Sia A_k una successione tale che $a_k = A_k - A_{k-1}$ (ad esempio $A_k = a_1 + \dots + a_k$ con $A_0 = 0$).*

Allora si ha

$$\sum_{k=p}^q a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) - A_{p-1} b_p + A_q b_q.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q a_k b_k &= \sum_{k=p}^q (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=p}^q A_k b_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_p b_p - A_{p-1} b_p. \end{aligned}$$

Infatti ponendo $j = k - 1$ si ha

$$\sum_{k=p}^q A_{k-1} b_k = \sum_{j=p-1}^{q-1} A_j b_{j+1}$$

□

Teorema 1.5.2. *Siano a_k, b_k due successioni tali che $\sup_n \sum_{k=0}^n a_k < +\infty$ e b_k è decrescente e tende a zero. Allora la serie $\sum a_k b_k$ converge.*

Dimostrazione. Sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ la successione delle somme parziali. Applicando la formula di somma per parti si ha

$$|S_q - S_{p-1}| = \left| \sum_{k=p}^q a_k b_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k| (b_k - b_{k+1}) + |A_{p-1}| b_p + |A_q| b_q$$

dove $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Posto $M = \sup_k A_k$ per ipotesi $M < +\infty$ e si ha quindi

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) + M b_p + M b_q = M(b_p - b_q) + M b_p + M b_q = 2M b_p.$$

Essendo $b_p \rightarrow 0$ scelto comunque $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $p > N$ si ha $2M b_p < \varepsilon$ e quindi per ogni $q > p > N$ si trova $S_q - S_{p-1} < \varepsilon$. In conclusione S_n è una successione di Cauchy e quindi converge. □

Teorema 1.5.3. *Sia a_k una successione tale che $\sum_k a_k b_k$ converge per ogni $b \in c_0$ ($b_k \rightarrow 0$). Allora $a \in \ell^1$ ($\sum_k |a_k| < \infty$).*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\sum_k |a_k| = \infty$. Sia k_n una successione crescente di naturali con $k_1 = 1$ e tale che $\sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |a_k| > 1$. Definiamo b_k in modo che $b_k = a_k / (n|a_k|)$ per $k = k_n + 1, \dots, k_{n+1}$. Chiaramente $b_k \rightarrow 0$, d'altra parte si ha

$$\sum_k a_k b_k = \sum_n \frac{1}{n} \sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |a_k| \geq \sum_n 1/n = \infty$$

che contraddice l'ipotesi. □

Teorema 1.5.4. *Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sia convergente per un certo $z \in \mathbb{C}$. Allora posto $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k (tz)^k$ la successione (f_n) converge uniformemente. In particolare si ha*

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (tz)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Dimostrazione. Sia $r \in [0, +\infty]$ il raggio di convergenza della serie in questione. Siccome la serie converge in z abbiamo che $|z| \leq r$. Inoltre notiamo subito che se fosse $|z| < r$ già sappiamo dai teoremi precedenti che la convergenza della serie è uniforme, dunque il caso interessante è $|z| = r$.

Dunque per ogni $t \in [0, 1[$ si ha $|tz| < r$ e quindi sappiamo che la serie

$$f(t) = \sum_{k=0}^n a_k (tz)^k$$

converge assolutamente per ogni $t \in [0, 1[$ inoltre per ipotesi sappiamo che converge (e quindi la funzione f è ben definita) anche per ogni $t \in [0, 1]$. Vogliamo mostrare che f_n converge a f uniformemente.

Dalla regola di somma per parti dato $q > p$ si ha

$$|f_q(t) - f_p(t)| = \left| \sum_{k=p+1}^q (a_k z^k) t^k \right| \leq \sum_{k=p+1}^{q-1} f_k(1)$$

□

Teorema 1.5.5. *Si ha $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ e $(c_0)^* = \ell^1$.*

Dimostrazione. La prima affermazione è facile, la seconda segue dal teorema precedente. □

1.6 Funzioni di una variabile reale

Teorema 1.6.1 (degli zeri). *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che $f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0$. Allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Definiamo per induzione due successioni a_k e b_k in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. $a_k, b_k \in [a, b]$;
2. $f(a_k) \leq 0$, $f(b_k) \geq 0$;
3. a_k crescente, b_k decrescente;
4. $|a_k - b_k| = |a - b|/2^{k-1}$.

Poniamo $a_1 := a$, $b_1 := b$. Supponendo di aver definito a_k e b_k definiamo ora i punti a_{k+1} e b_{k+1} . Posto $c_k = (a_k + b_k)/2$ distinguiamo due casi.

Se $f(c_k) > 0$ poniamo $a_{k+1} := a_k$ e $b_{k+1} = c_k$. Se invece $f(c_k) \leq 0$ poniamo $a_{k+1} := c_k$ e $b_{k+1} = b_k$. È facile verificare che le successioni, così definite, soddisfano le proprietà richieste.

Essendo monotone le due successioni convergono, $a_k \rightarrow \xi$, $b_k \rightarrow \eta$, ed essendo $|a_k - b_k| \rightarrow 0$ si ha $\xi = \eta$. Inoltre, essendo f continua si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k).$$

D'altra parte essendo $f(a_k) \leq 0$ e $f(b_k) \geq 0$ si deve avere contemporaneamente $f(\xi) \leq 0$ e $f(\xi) \geq 0$ e quindi $f(\xi) = 0$. □

Teorema 1.6.2 (dei valori intermedi). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(I) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Ossia: l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua, è un intervallo.*

Dimostrazione. Siano y_1, y_2 due punti qualunque di $f(I)$ e sia $y \in [y_1, y_2]$. Dobbiamo dimostrare che $y \in f(I)$. Siano x_1 e x_2 i punti di I tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che sia $x_1 \leq x_2$ (altrimenti scambiamo i due punti dati inizialmente) e che sia $y_1 \leq y_2$ (altrimenti consideriamo $-f$ al posto di f). Consideriamo dunque la funzione $g(x) = f(x) - y$. Essendo $y_1 \leq y \leq y_2$ si ottiene $f(x_1) \leq 0$ e $f(x_2) \geq 0$. Applicando dunque il Teorema degli zeri otteniamo che esiste un punto $x \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x) = 0$ e quindi $f(x) = y$. Dunque $y = f(x) \in f(I)$ come volevamo dimostrare. □

Esempio 1.6.3. Vogliamo dimostrare che l'equazione $x^n = \alpha$ ha almeno una soluzione non negativa per ogni n naturale e per ogni $\alpha \geq 0$. Si consideri la funzione $f(x) = x^n$ sull'intervallo $I = [0, +\infty)$. Notiamo che $f(0) = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Dunque $\sup f(I) = +\infty$. Siccome f è continua, sappiamo che $f(I)$ è un intervallo, e visto che $0 \in f(I)$ e che $+\infty = \sup f(I)$ deduciamo che $f(I) = [0, +\infty)$. In particolare $\alpha \in f(I)$ e quindi esiste $\bar{x} \geq 0$ tale che $f(\bar{x}) = \alpha$ ovvero $\bar{x}^n = \alpha$.

Esempio 1.6.4. Sia $p(x)$ un qualunque polinomio di grado dispari. Supponiamo che il coefficiente del termine di grado massimo sia positivo. Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

In particolare deduciamo che $\sup p(\mathbb{R}) = +\infty$ e $\inf p(\mathbb{R}) = -\infty$. Visto che $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, sappiamo anche che $p(\mathbb{R})$ è un intervallo. Dunque $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ovvero p è surgettiva. In particolare esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $p(\bar{x}) = 0$.

Definizione 1.6.5 (massimo e minimo). *Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme X qualunque. Se esiste un punto $\bar{x} \in X$ tale che per ogni $x \in X$ si ha $f(\bar{x}) \geq f(x)$ allora si dice che f ammette massimo su X , \bar{x} si dice punto di massimo per f su X e $f(\bar{x})$ si dice valore massimo di f su X e si indica con $\max f(X)$ o $\max_{x \in X} f(x)$. Analogamente si definiscono i punti di minimo e il valore minimo quando $f(\bar{x}) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$. Il valore minimo si può indicare con $\min f(X)$ o $\min_{x \in X} f(x)$.*

Bisogna notare che non tutte le funzioni ammettono massimo o minimo. Ad esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ non ammette nè massimo nè minimo. Inoltre quando il valore massimo esiste esso è unico e coincide con l'estremo superiore: $\max f(X) = \sup f(X)$. Analogamente per il minimo: $\min f(X) = \inf f(X)$.

Il punto di massimo (o minimo) invece può anche non essere unico. Ad esempio per una funzione costante ogni punto è sia di massimo che di minimo.

Teorema 1.6.6 (Weierstrass). *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $M = \sup f([a, b])$ e $m = \inf f([a, b])$. Per definizione di sup e inf esistono due successioni (x_k) e (y_k) tali che $f(x_k) \rightarrow M$ e $f(y_k) \rightarrow m$. Per il Teorema di compattezza possiamo estrarre due sottosuccessioni convergenti $(x_{k_j}) \rightarrow x$ e $(y_{k_j}) \rightarrow y$. Chiaramente $x, y \in [a, b]$ ed essendo f continua si ha $f(x) = \lim_k f(x_{k_j}) = M$ e $f(y) = \lim_k f(y_{k_j}) = m$. Dunque x e y sono rispettivamente punti di minimo e di massimo. \square

Teorema 1.6.7 (Fermat). *Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Se $x_0 \in]a, b[$ è un minimo (o un massimo) per f e se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x_0)$ sia un minimo (se è un massimo la dimostrazione è analoga). Allora $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in]a, b[$. Posto $m(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ si ha dunque che $m(h) \geq 0$ se $h > 0$ e $m(h) \leq 0$ se $h < 0$. Siccome f è derivabile in x_0 la derivata destra e sinistra in x_0 esistono e sono uguali:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) \geq 0, \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} m(h) \leq 0.$$

Dunque si ottiene $f'(x_0) = 0$. \square

Teorema 1.6.8 (Rolle). *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f ammette punto di minimo x_0 su $[a, b]$. Se $x_0 \in]a, b[$ allora per il Teorema di Fermat si conclude $f'(x_0) = 0$. Se invece $x_0 \in \{a, b\}$ scegliamo un punto di massimo x_1 . Se $x_1 \in]a, b[$ abbiamo concluso altrimenti, essendo $f(a) = f(b)$ si ottiene $f(x_0) = f(x_1)$. In tal caso, essendo il valore massimo uguale al minimo necessariamente f è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$. \square

Teorema 1.6.9 (Lagrange). *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Posto $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - mx$. Si verifica facilmente che $g(b) = g(a)$ e chiaramente la funzione g è continua dove f è continua e derivabile dove f è derivabile. Dunque g verifica le ipotesi del Teorema di Rolle e quindi esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $g'(\xi) = 0$. Cioè

$$g'(\xi) = f'(\xi) - m = 0$$

che è la tesi del teorema. \square

Teorema 1.6.10 (Cauchy). *Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$. Allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Se inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ si ha necessariamente $g(b) \neq g(a)$ (per il Teorema di Rolle) e possiamo scrivere la relazione precedente come

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Si verifica facilmente che $F(b) = F(a)$ e quindi applicando il Teorema di Rolle si ottiene, l'esistenza di un punto ξ tale che $F'(\xi) = 0$. Quest'ultima relazione è proprio il risultato cercato. \square

Ci sarà utile, in seguito, avere i precedenti teoremi enunciati in una versione un poco più generale. Si noti infatti che le funzioni risultano definite su un generico intervallo I che può essere anche non limitato. Se I è un intervallo generico, gli estremi dell'intervallo sono $\inf I$ e $\sup I$. A seconda che l'intervallo I sia aperto, chiuso o semi-aperto, gli estremi possono essere o non essere contenuti in I .

Teorema 1.6.11 (Rolle esteso). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e non vuoto, e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I . Posti $a = \inf I$ e $b = \sup I$ se i seguenti limiti esistono e sono uguali*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

(con $m \in [-\infty, +\infty]$) allora esiste un punto $\xi \in I$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Se m è finito e $f = m$ identicamente su I allora $f' = 0$ identicamente e il risultato è provato. In caso contrario esisterà un punto $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) \neq m$. Supponiamo, per esempio, che $y_0 = f(x_0) > m$ (l'altro caso si tratterà in maniera analoga). Dalla definizione di limite (o meglio, dalla permanenza del segno) sappiamo dunque esistere due punti $a', b' \in I$ con $a < a' < x_0 < b' < b$ tali che

$f(a) < y_0$ e $f(b) < y_0$. Ora per il teorema di Weierstrass sappiamo che f ristretta all'intervallo $[a', b'] \subset I$ ammette massimo in un punto ξ . Essendo x_0 un punto di questo intervallo si avrà dunque $f(\xi) \geq f(x_0) = y_0$ e dunque ξ non può essere nè il punto a' nè il punto b' . In particolare ξ è un punto interno all'intervallo $]a', b'[$ e quindi per il Teorema di Fermat si deve avere $f'(\xi) = 0$. \square

Teorema 1.6.12 (Cauchy esteso). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e non vuoto e siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Posti $a = \inf I$ e $b = \sup I$, se le funzioni f e g ammettono limite finito agli estremi a e b dell'intervallo I allora esiste un punto $\xi \in I$ tale che*

$$f'(\xi)(g_b - g_a) = g'(\xi)(f_b - f_a)$$

dove f_a, f_b, g_a e g_b sono rispettivamente i limiti delle funzioni f e g nei punti a e b .

Se inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ si ha necessariamente $g_b \neq g_a$ (per il Teorema di Rolle esteso) e possiamo scrivere la relazione precedente come

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f_b - f_a}{g_b - g_a}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F(x) = f(x)(g_b - g_a) - g(x)(f_b - f_a)$. Si verifica facilmente che la funzione F verifica le ipotesi del Teorema di Rolle esteso. Dunque sappiamo esistere un punto ξ tale che $F'(\xi) = 0$. Quest'ultima relazione è proprio il risultato cercato. \square

Teorema 1.6.13 (L'Hôpital forma "0/0"). *Sia $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ e I un intervallo aperto con x_0 come punto di accumulazione (ovvero $x_0 \in]\inf I, \sup I[$). Siano f e g due funzioni reali definite e derivabili su $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ed esiste il limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora anche il seguente limite esiste e vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Dato $x \in I$, dal teorema di Cauchy esteso sappiamo esistere $\xi_x \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f_{x_0}}{g(x) - g_{x_0}} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Siccome per $x \rightarrow x_0$ si ha $\xi_x \rightarrow x_0$, il limite seguente esiste e vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

da cui segue il risultato desiderato. \square

Notiamo che il precedente teorema è valido anche per limiti destri e sinistri e per limiti all'infinito.

Facciamo alcuni esempi che mettono in evidenza l'importanza di tutte le ipotesi del teorema.

Esempio 1.6.14. Sia $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $x_0 = 0$. Nonostante che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Esempio 1.6.15. Sia $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ e $x_0 = 0$. Nonostante che il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

non esista, il limite seguente esiste e vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Teorema 1.6.16 (monotonia). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su I e derivabile su $\overset{\circ}{I}$.*

1. *Se per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$ si ha $f'(x) \geq 0$ allora f è crescente;*
2. *se per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$ si ha $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente;*
3. *se per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$ si ha $f'(x) \leq 0$ allora f è decrescente;*
4. *se per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$ si ha $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente.*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo risultato, gli altri sono analoghi. Se per assurdo f non fosse crescente esisterebbero $x, y \in I$, $x < y$ tali che $f(x) > f(y)$. Ma allora per il Teorema di Lagrange troveremmo un punto $\xi \in]x, y[\subset \overset{\circ}{I}$ in cui $f'(\xi) < 0$. \square

Si confronti la seguente affermazione con il Teorema dei valori intermedi.

Proposizione 1.6.17 (continuità delle funzioni monotone). *Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Allora i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x)$$

esistono per ogni $x_0 \in [\inf I, \sup I]$ e per ogni $x_1 \in (\inf I, \sup I]$. Inoltre per ogni $x_0 \in I$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

e supponiamo che $f(I)$ sia un intervallo. Allora f è continua.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che una funzione monotona ammette sempre limite destro e limite sinistro in ogni punto. Possiamo supporre, senza perdere generalità, che la funzione f sia monotona crescente. Sia x_0 un punto dell'intervallo I e sia $I^+ = \{x \in I: x > x_0\}$. Supponiamo che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I cosicchè si ha $I^+ \neq \emptyset$. Allora posto $m = \inf f(I^+)$, per la definizione di estremo inferiore si ha

$$f(y) \geq m, \quad \forall y \in I^+; \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in I^+: f(x) < m + \varepsilon.$$

Essendo però f crescente, dato $y \in (x_0, x)$ si ha $f(y) < f(x)$ e dunque ponendo $\delta = x - x_0$, si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in (x_0, x_0 + \delta): f(y) \in [m, m + \varepsilon]$$

che è esattamente la proprietà che definisce

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m.$$

Analogamente si può dimostrare che esiste il limite sinistro in ogni punto $x_0 \in I$, (tranne che nel caso in cui x_0 è l'estremo sinistro dell'intervallo I).

Questo già ci dice che la funzione è continua negli estremi dell'intervallo (se l'intervallo contiene gli estremi). Preso un punto x_0 interno all'intervallo I dobbiamo invece dimostrare che il limite destro m e il limite sinistro M coincidono. Essendo f crescente si nota però che vale $f(x) \geq m$ per ogni $x > x_0$ e $f(x) \leq M$ per ogni $x < x_0$ ovvero $f(I) \subset (-\infty, M] \cup \{f(x_0)\} \cup [m, +\infty)$. Chiaramente deve essere $M \leq m$ in quanto la funzione f è crescente. D'altra parte sappiamo per ipotesi che $f(I)$ è un intervallo e quindi deve contenere interamente l'intervallo $[M, m]$ e questo può succedere solo se $M = m$. \square

Proposizione 1.6.18 (continuità della funzione inversa). *Sia I un intervallo di \mathbb{R} e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e continua. Allora posto $J = f(I)$, J è un intervallo, la funzione $f: I \rightarrow J$ è invertibile e la funzione inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$ è strettamente monotona e continua.*

Dimostrazione. Il fatto che $J = f(I)$ sia un intervallo è garantito dal Teorema dei valori intermedi. Per definizione di J si ha che $f: I \rightarrow J$ è surgettiva, inoltre f è iniettiva in quanto è strettamente monotona. Dunque esiste la funzione inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$. Senza perdere di generalità supponiamo ora che f sia strettamente crescente (in caso contrario possiamo applicare il teorema a $-f$). Vogliamo ora mostrare che f^{-1} è strettamente crescente. Dati $x, y \in J$ sia $a = f^{-1}(x)$ e sia $b = f^{-1}(y)$ cosicchè $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Se $x < y$ allora necessariamente $a < b$ in quanto f è strettamente crescente. Dunque abbiamo mostrato che se $x < y$ allora $f^{-1}(x) = a < b = f^{-1}(y)$ cioè f^{-1} è pure strettamente crescente. \square

Teorema 1.6.19. *Sia $f:]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 e derivabile in ogni punto $x \neq x_0$. Se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = m$ allora f è derivabile in x_0 e vale $f'(x_0) = m$.*

Dimostrazione. Siccome f è continua in x_0 si ha $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ e dunque applicando l'Hôpital si ottiene

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{1} = m.$$

\square

1.7 Uniforme continuità

1.7.1 Funzioni uniformemente continue, Lipschitziane, α -Hölderiane

Definizione 1.7.1. *Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$*

- *si dice continua se*

$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- *si dice uniformemente continua se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- *si dice Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

- si dice α -Hölderiana (con $\alpha > 0$) se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

Chiaramente ogni funzione uniformemente continua è anche continua. Si noti che 1-Hölderiano e Lipschitziano sono sinonimi. Notiamo anche che se f è α -Hölderiana con $\alpha > 1$ si ha

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C|x - x_0|^{\alpha-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

e quindi $f'(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in A$. Dunque se A è un intervallo allora f è costante. Per questo le funzioni α -Hölderiane sono interessanti solo quando $\alpha < 1$.

Teorema 1.7.2. *Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è α -Hölderiana per un certo $\alpha > 0$ allora f è β -Hölderiana per ogni $\beta \leq \alpha$. In particolare se f è Lipschitziana allora f è α -Hölderiana per ogni $\alpha < 1$.*

Dimostrazione. Supponiamo dunque che valga

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Dato $\beta \leq \alpha$ poniamo $C' = C|b - a|^{\alpha-\beta}$. Allora se $x, y \in [a, b]$ si ha

$$C|x - y|^\alpha \leq C'|x - y|^\beta$$

e dunque f è β -Hölderiana. □

Teorema 1.7.3. *Per verificare che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua è sufficiente mostrare che esiste una funzione $G: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ che*

- $\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq G(|x - y|)$;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = 0$.

Dimostrazione. Essendo $G(t) \rightarrow 0$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad t < \delta \Rightarrow G(t) < \varepsilon$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq G(|x - y|) < \varepsilon$$

cioè f è uniformemente continua. □

Se ne deduce facilmente che ogni funzione Lipschitziana o α -Hölderiana è uniformemente continua.

Teorema 1.7.4. *Per verificare che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ non è uniformemente continua è sufficiente trovare due successioni $x_k, y_k \in A$ tali che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = 0$$

ma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k) - f(y_k)| > 0.$$

Dimostrazione. Siccome $|f(x_k) - f(y_k)|$ è una successione positiva ma non infinitesima possiamo trovare un $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione indicizzata tramite k_j tale che $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \geq \varepsilon$ per ogni j . D'altra parte essendo $|x_k - y_k| \rightarrow 0$ si ha

$$\forall \delta > 0 \exists k \quad |x_k - y_k| < \delta$$

e quindi per ogni $\delta > 0$ è possibile trovare k_j tale che posto $x = x_{k_j}$ e $y = y_{k_j}$ si abbia $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ mentre $|x - y| < \delta$. Dunque f verifica la negazione della proprietà di uniforme continuità

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in A \quad |x - y| < \delta \text{ ma } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

□

Esercizi

1. Mostrare che $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua.
2. Mostrare che $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua.
3. Mostrare che $f(x) = \sin(1/x)$ non è uniformemente continua.
4. Mostrare che $f(x) = |x|$ è Lipschitziana.
5. Mostrare che $f(x) = \sqrt{|x|}$ è 1/2-Hölderiana ma non Lipschitziana.
6. Trovare una funzione uniformemente continua ma non α -Hölderiana per alcun $\alpha > 0$.

1.7.2 Successioni di Cauchy

Definizione 1.7.5. Una successione x_k si dice di Cauchy se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < \varepsilon$$

Teorema 1.7.6. Ogni successione convergente è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia $x_k \rightarrow x$ una successione convergente. Dunque vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k \geq N \quad |x_k - x| < \varepsilon$$

e quindi presi $k, j \geq N$ si ha

$$|x_k - x_j| \leq |x_k - x| + |x - x_j| < 2\varepsilon$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < 2\varepsilon$$

che è equivalente alla definizione delle successioni di Cauchy. □

Teorema 1.7.7. Ogni successione di Cauchy converge.

Dimostrazione. Data una successione di Cauchy x_k definiamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists N \forall k \geq N \quad x_k \leq x\}.$$

Chiaramente se $x \in A$ e $y \geq x$ anche $y \in A$. Dunque A è un intervallo illimitato superiormente. Se A fosse anche illimitato inferiormente (cioè $A = \mathbb{R}$) si avrebbe

$$\forall M \exists N \forall k \geq N \quad x_k \leq -M$$

che significa $x_k \rightarrow -\infty$. Questo significa in particolare che dato qualunque $\varepsilon > 0$, qualunque N e qualunque $j \geq N$ esiste $k \geq N$ tale che $x_k < x_j - \varepsilon$ cioè $|x_k - x_j| > \varepsilon$. Ma questo va contro l'ipotesi che x_k sia di Cauchy.

Dunque A è inferiormente limitato e quindi ammette estremo inferiore. Posto $a = \inf A$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad a + \varepsilon > x$$

e quindi $a + \varepsilon \in A$ per ogni $\varepsilon > 0$. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $a - \varepsilon \notin A$. Da $a + \varepsilon \in A$ ricaviamo che

$$\exists N_1 \forall k \geq N_1 \quad x_k \leq a + \varepsilon$$

e da $a - \varepsilon \notin A$ troviamo

$$\forall N \exists j \geq N \quad x_j \geq a - \varepsilon$$

dalla proprietà di Cauchy si ha invece

$$\exists N_2 \forall k, j \geq N_2 \quad x_j < x_k + \varepsilon.$$

Mettendo assieme queste proprietà e scegliendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists j \geq N \forall k \geq N \quad a - \varepsilon < x_j < x_k + \varepsilon \leq a + 2\varepsilon$$

da cui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k \geq N \quad a - 2\varepsilon < x_k \leq a + \varepsilon$$

che significa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a.$$

□

Teorema 1.7.8. *Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua e x_k è una successione di Cauchy in A allora la successione $y_k = f(x_k)$ è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia x_k una successione di Cauchy e sia f uniformemente continua. Dall'uniforme continuità di f

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

troviamo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \quad |x_k - x_j| < \delta \Rightarrow |y_k - y_j| < \varepsilon.$$

Essendo x_k di Cauchy si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < \delta_\varepsilon$$

da cui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j \geq N \quad |y_k - y_j| < \varepsilon$$

cioè y_k è di Cauchy. □

1.7.3 Estensioni

Teorema 1.7.9. *Sia $f:]a, b]$ una funzione uniformemente continua. Allora esiste finito il limite*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Dimostrazione. Sia $x_k > a$ una qualunque successione convergente ad a . Allora x_k è una successione di Cauchy e quindi $f(x_k)$ è a sua volta una successione di Cauchy che quindi converge ad un certo valore l . D'altra parte il valore l trovato non dipende dalla successione scelta. Infatti prese x_k e y_k due diverse successioni convergenti ad a , sappiamo che $f(x_k) \rightarrow l_1$ e $f(y_k) \rightarrow l_2$. Ma allora anche la successione

$$z_k = \begin{cases} x_k & \text{per } k \text{ pari} \\ y_k & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

converge ad a e quindi anche $f(z_k)$ converge. Ma i termini pari di $f(z_k)$ convergono a l_1 e i termini dispari convergono a l_2 . Dunque per l'unicità del limite $l_1 = l_2$. In conclusione esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che per qualunque successione $x_k \rightarrow a^+$ si ha $f(x_k) \rightarrow l$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

□

Notiamo dunque che una funzione uniformemente continua $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ può essere con continuità ad una funzione continua $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. D'altra parte la funzione \bar{f} risulta essere anche uniformemente continua per il teorema di Cantor (o per verifica diretta).

Teorema 1.7.10. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora è possibile estendere f ad una funzione lipschitziana $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mantenendo la stessa costante di Lipschitz L .*

1.7.4 Modulo di continuità

Definizione 1.7.11. *Data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo modulo di continuità di f la funzione $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da*

$$M(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A, |x - y| \leq t\}$$

Dalla definizione si verifica facilmente che $M(t)$ è una funzione crescente. Infatti se l'insieme di cui si calcola l'estremo superiore diventa più grande (rispetto all'inclusione di insiemi) al crescere di t e quindi anche l'estremo superiore cresce al crescere di t .

Teorema 1.7.12. *Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione qualunque e M è il suo modulo di continuità allora:*

- f è uniformemente continua se e solo se $M(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$;
- f è lipschitziana se esiste $L > 0$ tale che $M(t) \leq Lt$;
- f è α -Hölderiana se esiste $C > 0$ tale che $M(t) \leq Ct^\alpha$.

Dimostrazione. Innanzitutto si verifica direttamente dalla definizione di M che si ha la seguente equivalenza

$$\begin{aligned} M(\delta) \leq \varepsilon \\ \Downarrow \\ \forall x, y \in A \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

e dalla definizione di limite (ricordando che $M(t)$ è positiva e crescente) si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} M(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad M(\delta) \leq \varepsilon.$$

Mettendo assieme le due precedenti equivalenze si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, y \in A \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

che è equivalente alla definizione di uniforme continuità per f .

Chiaramente se M è il modulo di continuità di f allora si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq M(|x - y|) \quad \forall x, y \in A.$$

Dunque se $M(t) \leq Lt$ si trova che f è lipschitziana e se $M(t) \leq Lt^\alpha$ si trova che f è α -Hölderiana.

D'altro canto se f è Lipschitziana si ha

$$M(t) = \sup_{|x-y| \leq t} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{|x-y| \leq t} L|x - y| \leq Lt.$$

Risultato analogo si ottiene per le funzione α -Hölderiane. □

1.8 Funzioni convesse

Definizione 1.8.1. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $A \subset V$. Diciamo che A è un insieme convesso se vale*

$$tx + (1 - t)y \in A \quad \forall x, y \in A \forall t \in [0, 1].$$

Si noti che il segmento di estremi x e y si scrive nella forma

$$[x, y] := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$$

dunque possiamo affermare che un insieme è convesso se contiene tutti i segmenti i cui estremi stanno nell'insieme stesso.

Si noti anche che nel caso $V = \mathbb{R}$, un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è convesso se e solo se è un intervallo.

Definizione 1.8.2. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un sottoinsieme convesso A di V . Diciamo allora che f è convessa se*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad \forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1].$$

Lemma 1.8.3. *Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di \mathbb{R} una funzione convessa. Allora il rapporto incrementale*

$$R(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

è una funzione crescente sia in x che in y .

Dimostrazione. Notiamo che $R(x, y) = R(y, x)$ e dunque è sufficiente mostrare che fissato x la funzione $y \mapsto R(x, y)$ è crescente. Mostriamo innanzitutto che se $y_2 > y_1 > x$ si ha $R(x, y_2) \geq R(x, y_1)$. Per far questo scegliamo

$$t = \frac{y_1 - x}{y_2 - x}$$

in modo che $t \in [0, 1]$ e $y_1 = tx + (1 - t)y_2$. Applicando la definizione di convessità si ottiene dunque

$$f(y_1) \leq \frac{y_1 - x}{y_2 - x} f(y_2) + \frac{y_2 - y_1}{y_2 - x} f(x)$$

sottraendo ad ambo i membri $f(x)$ si ottiene

$$f(y_1) - f(x) \leq \frac{y_1 - x}{y_2 - x} f(y_2) - \frac{y_1 - x}{y_2 - x} f(x)$$

e dividendo per $y_1 - x$ si conclude

$$\frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x} \leq \frac{f(y_2) - f(x)}{y_2 - x}$$

cioè $R(x, y_1) \leq R(x, y_2)$. □

In particolare per ogni $x \in I$ il rapporto incrementale

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è una funzione crescente e dunque (se x ha un intorno destro in I) esiste la derivata destra

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e analogamente esiste la derivata sinistra se x ha un intorno sinistro in I .

Sia ora X uno spazio vettoriale reale e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Allora, si vede che per ogni $v \in X$ e $x \in X$ la funzione $t \mapsto f(x + tv)$ è una funzione convessa da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dunque per il Lemma precedente esistono le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

in ogni punto $x \in X$ e ogni direzione $v \in X$.

Notiamo inoltre che si avrà (in quanto il rapporto incrementale è crescente):

$$f(x + v) \geq f(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

Definiamo allora il *sottodifferenziale* di f in $x \in X$ come l'insieme

$$\partial^- f(x) := \{\xi \in X^* : f(x + v) \geq f(x) + \langle \xi, v \rangle\}.$$

Notiamo che questo insieme è convesso.

Capitolo 2

Topologia

2.1 Spazi topologici

Definizione 2.1.1 (spazio topologico). *Sia X un insieme e $\tau \subset 2^X$ una famiglia di sottoinsiemi di X . Diremo che (X, τ) è uno spazio topologico o che τ è una topologia su X se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;
2. se $A, B \in \tau$ allora $A \cap B \in \tau$;
3. se I è un qualunque insieme di indici e $A_i \in \tau$ per ogni $i \in I$ allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Definizione 2.1.2 (aperto, chiuso). *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dato $A \subset X$ diremo che A è aperto in X (rispetto alla topologia τ) se $A \in \tau$ e diremo che A è chiuso in X (rispetto alla topologia τ) se $X \setminus A \in \tau$.*

Dalla definizione di topologica seguono le seguenti proprietà per i chiusi di uno spazio topologico (X, τ) :

1. \emptyset e X sono chiusi;
2. se A e B sono chiusi allora $A \cup B$ è chiuso;
3. se I è un qualunque insieme di indici e A_i è chiuso per ogni $i \in I$ allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è chiuso.

Ricordiamo infatti che $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ e $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$.

Definizione 2.1.3 (intorno). *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dati $U \subset X$ e $x \in X$ diremo che U è un intorno di x se U contiene un aperto che contiene x (cioè esiste $A \in \tau$ tale che $x \in A \subset U$).*

Notiamo che $A \subset X$ è aperto se e solo è un intorno di ogni suo punto (A è intorno di x per ogni $x \in A$).

Definizione 2.1.4 (punto interno, parte interna). *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $A \subset X$ e $x \in X$. Si dice che x è un punto interno ad A se A è un intorno di x (ovvero esiste $U \in \tau$ tale che $x \in U \subset A$).*

Dato $A \subset X$ chiamiamo parte interna di A l'insieme $\overset{\circ}{A}$ dei punti interni ad A :

$$\overset{\circ}{A} := \{x \in X : \exists U \in \tau, x \in U \subset A\}.$$

Definizione 2.1.5 (punto aderente, chiusura). *Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ e $x \in X$. Si dice che x è un punto aderente ad A (o punto di aderenza) se ogni intorno di x interseca A (ovvero per ogni $U \in \tau$ si ha $x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$).*

Dato $A \subset X$ chiamiamo chiusura di A l'insieme \overline{A} dei punti aderenti ad A :

$$\overline{A} := \{x \in X : \forall U \in \tau, x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definizione 2.1.6 (bordo). *Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$. Definiamo il bordo come l'insieme $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ dei punti aderenti ma non interni ad A .*

Definizione 2.1.7 (denso). *Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$. Diciamo che A è denso in X se $\overline{A} = X$.*

Definizione 2.1.8 (punti isolati, punti di accumulazione). *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $A \subset X$ e $x \in X$. Si dice che x è un punto isolato di A se $x \in A$ e se esiste un intorno di x che non contiene altri punti di A al di fuori di x (ovvero esiste $U \in \tau$ tale che $x \in U$ e $U \cap A = \{x\}$).*

Si dice che x è un punto di accumulazione per A se x è un punto di aderenza per $A \setminus \{x\}$ (ovvero per ogni $U \in \tau$, se $x \in U$ allora $(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$). Equivalentemente x è un punto di accumulazione per A se x è un punto di aderenza ma non un punto isolato di A .

Teorema 2.1.9 (parte interna, chiusura, bordo). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $A \subset X$. Allora*

1. $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$ e $X \setminus \overline{A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$;
2. la parte interna di A è un aperto, anzi è il più grande aperto contenuto in A ;
3. la chiusura di A è un chiuso, anzi è il più piccolo chiuso contenente A ;
4. il bordo di A è un chiuso.

Dimostrazione. 1. Sia $x \in X \setminus \overset{\circ}{A}$. Allora dovrà esistere un aperto $U \in \tau$ tale che $x \in U$ ma $U \cap A = \emptyset$. Dunque $\overline{U} \subset X \setminus A$ e cioè x è un punto aderente di $X \setminus A$. D'altra parte dato $x \in X \setminus \overline{A}$ se $U \in \tau$ è un qualunque aperto tale che $x \in U$ si ha $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Dunque non può essere $U \subset A$ e quindi x non è un punto interno di A . Abbiamo quindi mostrato la prima uguaglianza.

La seconda uguaglianza segue direttamente dalla prima sostituendo A con $X \setminus A$.

2. Siccome i punti di $\overset{\circ}{A}$ sono tutti i punti interni ad A , si ha che per ogni $x \in \overset{\circ}{A}$ esiste $U_x \in \tau$ tale che $x \in U_x \subset A$. Naturalmente dato $y \in U_x$ essendo $y \in U_x \subset A$ troviamo che anche y è un punto interno ad A e quindi $U_x \subset \overset{\circ}{A}$. Dunque $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x$ è unione di aperti ed è quindi a sua volta aperto. Abbiamo anche visto che se U è un aperto contenuto in A allora essendo tutti i punti di U interni ad A si ha $U \subset \overset{\circ}{A}$.
3. Segue dai due punti precedenti. Infatti \overline{A} è il complementare della parte interna di $X \setminus A$ dunque essendo il complementare di un aperto è un chiuso. Inoltre dato un qualunque chiuso C che contiene A il complementare di C è un aperto contenuto nel complementare di A e dunque è contenuto nella parte interna del complementare di A . Quindi $C \supset \overline{A}$.
4. Essendo $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ l'intersezione di due chiusi, è esso stesso chiuso. \square

Definizione 2.1.10 (base della topologia). *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si dice che una famiglia di aperti σ ($\sigma \subset \tau$) è una base per la topologia τ se per ogni aperto $A \in \tau$ esiste una famiglia $\{A_i\}$ di aperti di σ tale che $A = \bigcup_i A_i$.*

Definizione 2.1.11 (base di intorni). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Una famiglia \mathcal{U} di intorni di x viene chiamata base di intorni se contiene intorni “arbitrariamente piccoli” cioè se dato un qualunque intorno U di x esiste un intorno $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \subset U$.*

La conoscenza di una base di intorni per ogni punto di uno spazio topologico garantisce la possibilità di ricostruire l'intera topologia dello spazio. Infatti un insieme $A \subset X$ è aperto se e solo se per ogni punto $x \in X$ esiste un elemento U della base di intorni \mathcal{U}_x di x tale che $U \subset A$.

Teorema 2.1.12 (base di intorni). *Sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia \mathcal{U}_x una famiglia di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:*

1. per ogni $x \in X$ la famiglia \mathcal{U}_x non è vuota e per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ si ha $x \in U$;
2. se $U, V \in \mathcal{U}_x$ allora esiste $W \in \mathcal{U}_x$ tale che $W \subset U \cap V$.

Posto allora $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A \exists U \in \mathcal{U}_x U \subset A\}$ si ha che (X, τ) è uno spazio topologico e \mathcal{U}_x è una base di intorni di x per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Chiaramente $\emptyset \in \tau$. Anche $X \in \tau$ in quanto per ogni $x \in X$ si può scegliere un qualunque $U \in \mathcal{U}_x$ e questo è possibile in quanto \mathcal{U}_x è non vuoto.

Siano ora $A, B \in \tau$. Vogliamo mostrare che $A \cap B \in \tau$. Sia quindi dato $x \in A \cap B$. Siccome $x \in A$ e $A \in \tau$ deve esistere $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $x \in U \subset A$. Allo stesso modo deve esistere $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $x \in V \subset B$. Dalle proprietà di \mathcal{U}_x sappiamo però che esiste $W \in \mathcal{U}_x$ tale che $x \in W \subset U \cap V \subset A \cap B$. Siccome questo è vero per ogni $x \in A \cap B$ ne risulta che $A \cap B \in \tau$.

Ci resta da dimostrare che se $A_i \in \tau$ allora $\bigcup_i A_i \in \tau$. Questo è ovvio in quanto dato $x \in \bigcup_i A_i$ esiste i per cui $x \in A_i$. Essendo poi $A_i \in \tau$ esiste $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $U \subset A_i \subset \bigcup_i A_i$. \square

Definizione 2.1.13 (separabile, base numerabile). *Uno spazio topologico (X, τ) si dice separabile se esiste un sottoinsieme $D \subset X$ denso e numerabile.*

Uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto $x \in X$ ammette una base numerabile degli intorni $\mathcal{U}(x)$.

Uno spazio topologico (X, τ) si dice a base numerabile o che soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile \mathcal{B} della topologia τ .

Definizione 2.1.14 (prima e seconda categoria). *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice mai denso o anche magro se la parte interna della sua chiusura è vuota.*

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice di prima categoria se è unione numerabile di insiemi mai densi. Ovvero se è contenuto nell'unione numerabile di chiusi con parte interna vuota. Un insieme A si dice invece di seconda categoria se non è di prima categoria.

Teorema 2.1.15 (Baire). *Lo spazio topologico \mathbb{R} è di seconda categoria (come sottoinsieme di sè stesso).*

Definizione 2.1.16 (topologia indotta sui sottoinsiemi). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subset X$. Sia $\sigma \subset 2^Y$ definito come segue:*

$$\sigma := \{A \cap Y : A \in \tau\}.$$

Si verifica facilmente che (Y, σ) è uno spazio topologico. Questa topologia viene chiamata topologia indotta da (X, τ) su Y .

Definizione 2.1.17 (compatto). *Uno spazio topologico X si dice compatto se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito*

Definizione 2.1.18 (connesso). *Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi di X che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono \emptyset e X stesso.*

2.2 Funzioni continue

Definizione 2.2.1 (continuità). *Siano X e Y spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Diremo che f è continua se per ogni aperto A in Y l'insieme controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperto in X .*

Teorema 2.2.2 (proprietà delle funzioni continue). *Siano X e Y spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua.*

1. Se X è compatto allora $f(X)$ è compatto;
2. se X è sequenzialmente compatto allora $f(X)$ è sequenzialmente compatto;
3. se X è connesso allora $f(X)$ è connesso;
4. se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi;

Dimostrazione. 1. Sia \mathcal{G} un ricoprimento aperto di $f(X)$. Definiamo $\mathcal{F} := \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$. Siccome f essendo $G \in \mathcal{G}$ aperto troviamo che ogni $F = f^{-1}(G)$ è aperto. Inoltre $\bigcup \mathcal{F} = f^{-1}(\bigcup \mathcal{G}) = X$ e dunque \mathcal{F} è un ricoprimento aperto di X . Essendo X compatto possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. La famiglia corrispondente $\mathcal{G}' := \{f(F) : F \in \mathcal{F}'\}$ è una sottofamiglia finita di \mathcal{F} ed è un ricoprimento di $f(X)$ in quanto $\bigcup \mathcal{G}' = f(\bigcup \mathcal{F}') = f(X)$. Dunque da ogni ricoprimento aperto di $f(X)$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

2. Sia (y_k) una successione in $f(X)$. Allora esiste (x_k) tale che $f(x_k) = y_k$. Siccome X è sequenzialmente compatto possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $x_{k_j} \rightarrow x \in X$. Ma essendo f continua abbiamo $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \rightarrow f(x) \in f(X)$. Dunque abbiamo trovato una sottosuccessione convergente in $f(X)$.
3. Sia $B \subset f(X)$ un insieme aperto e chiuso in $f(X)$. Allora $A := f^{-1}(B)$ è aperto e chiuso in X (in quanto f è continua). Essendo X connesso ne ricaviamo che o $A = \emptyset$ o $A = X$ e quindi o $B = \emptyset$ oppure $B = f(X)$. Dunque $f(X)$ è connesso.
4. Siano a, b due punti qualunque di $f(X)$. Esistono allora $x, y \in X$ tali che $f(x) = a$ e $f(y) = b$. Essendo poi X connesso per archi deve esistere una curva continua γ che congiunge x a y in X . Essendo f continua deduciamo che $f \circ \gamma$ è una curva continua che congiunge a a b e dunque anche $f(X)$ è connesso per archi.

□

Definizione 2.2.3 (continuità in un punto). *Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione tra due spazi topologici, $x_0 \in X$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$.*

Proposizione 2.2.4 (continuità). *Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è continua se e solo se essa è continua in ogni punto $x \in X$.*

Dimostrazione. Mostriamo che se f è continua allora è continua in ogni punto. Sia $x_0 \in X$ e sia V un intorno di $f(x_0)$. Allora esiste un aperto V' tale che $f(x_0) \in V' \subset V$. Sappiamo allora che $U = f^{-1}(V')$ è aperto. Chiaramente $x_0 \in U$ e $f(U) = V' \subset V$.

Supponiamo ora che f sia continua in ogni punto $x \in X$. Sia V un qualunque aperto in Y e sia $A = f^{-1}(V)$. Dato $x_0 \in A$, essendo f continua in x_0 ed essendo V un intorno di $f(x_0)$ deve esistere un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$. Inoltre $U \subset A$ in quanto $A = f^{-1}(V)$ e $f(U) \subset V$. Dunque $x_0 \in U \subset V$ e quindi x_0 è un punto interno a V . Questo è vero per ogni $x_0 \in V$ e quindi V è aperto. \square

Teorema 2.2.5 (continuità in un punto della funzione composta). *Siano X, Y, Z spazi topologici e siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$. Se f è continua nel punto $x_0 \in X$ e g è continua nel punto $y_0 = f(x_0)$ allora la funzione composta $g \circ f: X \rightarrow Z$ è continua nel punto x_0 .*

Dimostrazione. Dato un intorno V di $z_0 = g(f(x_0))$ dobbiamo mostrare l'esistenza di un intorno U di x_0 tale che $g(f(U)) \subset V$. Per la continuità di g in $y_0 = f(x_0)$ deve esistere un intorno W di y_0 tale che $G(W) \subset V$. Per la continuità di f deve esistere un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset W$. Dunque, come voluto, $g(f(U)) \subset g(W) \subset V$. \square

Teorema 2.2.6 (continuità della funzione composta). *Siano X, Y, Z spazi topologici e siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ funzioni continue. Allora $g \circ f: X \rightarrow Z$ è una funzione continua.*

Dimostrazione. Se A è un aperto in Z allora $g^{-1}(A)$ è aperto in Y essendo g continua. Ma allora anche $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ è aperto in quanto anche f è continua. \square

2.3 Spazi metrici

Definizione 2.3.1 (spazio metrico). *Dato un insieme X , una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che (X, d) è uno spazio metrico se per ogni $x, y, z \in X$ valgono le seguenti proprietà:*

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

La funzione d viene chiamata distanza.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora, per ogni $x, y \in X$ si ha

$$0 = d(x, x)/2 \leq (d(x, y) + d(y, x))/2 = d(x, y)$$

da cui ricaviamo che $d(x, y) \geq 0$.

Definizione 2.3.2 (palla, disco, sfera). *Se (X, d) è uno spazio metrico, $x \in X$ e $\rho > 0$, definiamo rispettivamente la palla, il disco e la sfera centrati in x e di raggio ρ gli insiemi*

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\rho(x) &= \{y \in X : d(y, x) < \rho\}, \\ \mathbb{D}_\rho(x) &= \{y \in X : d(y, x) \leq \rho\}, \\ \mathbb{S}_\rho(x) &= \{y \in X : d(y, x) = \rho\}. \end{aligned}$$

Su uno spazio metrico (X, d) si definisce in maniera canonica una topologia. Questa topologia è la più piccola topologia che rende aperte tutte le palle di X . Tutte le definizioni e le proprietà date per gli spazi topologici si estendono quindi naturalmente agli spazi metrici.

Teorema 2.3.3 (topologia indotta da una metrica). *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia τ la famiglia di tutti i sottoinsiemi A di X tali che*

$$\forall x \in A \exists \rho > 0: \mathbb{B}_\rho(x) \subset A.$$

Allora (X, τ) è uno spazio topologico.

Si noti anche che dato $x \in X$ la famiglia $\mathcal{U}_x = \{\mathbb{B}_\rho(x) : \rho > 0\}$ è una base di intorni di x .

Definizione 2.3.4. *Sia $(x_k)_k$ una successione in uno spazio topologico X . Se $x \in X$ si dice che la successione x_k converge a x se per ogni intorno U di x esiste $N > 0$ tale che per ogni $k > N$ si ha $x_k \in U$ (ovvero la successione è contenuta in U definitivamente).*

2.4 Limiti

Definizione 2.4.1 (limite). *Siano X e Y spazi topologici e siano $A \subset X$, $B \subset Y$. Sia data una funzione $f: A \rightarrow B$ sia $x_0 \in X$ un punto di aderenza di A e $y_0 \in Y$. Diremo allora che f ha limite (o converge a) y_0 in x_0 o che $f(x)$ tende ad y_0 al tendere di x a x_0 e scriveremo*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \text{ o anche } f(x) \rightarrow y_0 \text{ se } x \rightarrow x_0$$

se per ogni intorno V di y_0 in Y esiste un intorno U di x_0 in X tale che $f(U \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset V$.

Diremo inoltre che il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

esiste se esiste $y_0 \in Y$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Notiamo che si richiede che x_0 sia un punto aderente ad A in caso contrario la definizione di limite sarebbe sempre verificata (per qualunque scelta di y_0). Vedremo invece in seguito che con poche ipotesi sulla topologia di X il limite, quando esiste, è unico. Notiamo anche che y_0 necessariamente risulta essere un punto aderente a B .

I due casi $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A$ nella precedente definizione hanno significati leggermente diversi. Notiamo comunque che anche se $x_0 \in A$ il valore di f in x_0 non assume alcuna rilevanza nella definizione di limite.

Se $x_0 \notin A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ è abbastanza naturale estendere la funzione $f: A \rightarrow B$ ad una funzione $\tilde{f}: A \cup \{x_0\} \rightarrow B \cup \{y_0\}$ definendo $\tilde{f}(x_0) = y_0$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq x_0$. Se invece $x_0 \in A$ la funzione f definita come sopra, risulta essere una modifica di f . In ogni caso vale il seguente risultato.

Proposizione 2.4.2 (limite e continuità). *Se \tilde{f} è l'estensione (o modifica) di f in un punto x_0 in cui f ammette limite y_0 , allora \tilde{f} risulta essere continua in x_0 (rispetto alle topologie indotte da X e da Y)*

In particolare se $f: A \rightarrow B$ e $x_0 \in A$ vale la seguente proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f \text{ è continua in } x_0.$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di y_0 in $B \cup \{y_0\}$ (rispetto alla topologia indotta da Y su $B \cup \{y_0\}$). Allora V contiene un aperto V' contenente y_0 . Siccome V' è aperto rispetto alla topologia indotta deve esistere V'' aperto in Y tale che $V' = V'' \cap (B \cup \{y_0\})$. Dunque V'' è un intorno di y_0 in Y e per la definizione di limite esiste un intorno U di x_0 in X tale che $f(U \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset V''$. Dato che $f(A) \subset B$ e dato che $\tilde{f}(x_0) = y_0 \in V$ si trova dunque che $f(U \cap (A \cup \{x_0\})) \subset V$. Essendo $U \cap (A \cup \{x_0\})$ un intorno di x_0 in $A \cup \{x_0\}$ abbiamo mostrato che \tilde{f} è continua in x_0 .

Se poi $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0)$ allora $\tilde{f} = f$ e quindi abbiamo mostrato che f è continua in x_0 . Viceversa se f è continua in x_0 , dato un intorno V di $f(x_0)$ in Y allora $V \cap B$ è un intorno di $f(x_0)$ in B e quindi (essendo f continua in x_0) esiste un intorno U di x_0 in A tale che $f(U) \subset V$. Ma se U è un intorno di x_0 in A allora U contiene un aperto U' in A che contiene x_0 ed essendo la topologia di A la topologia indotta da X sappiamo esistere un aperto U'' di X tale che $U' = U'' \cap A$. Dunque U'' è un intorno di x_0 in X e vale $f(U'' \cap A) = f(U') \subset f(U) \subset V$. Dunque $\lim f = f(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. \square

Definizione 2.4.3 (frequentemente, definitivamente). *Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ e $x_0 \in X$ un punto di aderenza di A . Sia $P(x)$ una proprietà definita per ogni $x \in A$. Diremo che $P(x)$ vale frequentemente per $x \rightarrow x_0$ se per ogni intorno U di x_0 esiste $x \in A \cap U$ tale che $P(x)$ è verificata. Diremo che $P(x)$ vale definitivamente per $x \rightarrow x_0$ se esiste un intorno U di x_0 tale che $P(x)$ è verificata per ogni $x \in U \cap (A \setminus \{x_0\})$.*

Possiamo quindi dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ se per ogni V intorno di y_0 si ha $f(x) \in V$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

Proposizione 2.4.4 (limiti in spazi metrici). *Siano X, Y spazi metrici, $A \subset X$, $B \subset Y$, $f: A \rightarrow B$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

è equivalente alla seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{x_0\} \ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim f = y_0$ per $x \rightarrow x_0$. Allora dato $\varepsilon > 0$ la palla $V = \mathbb{B}_\varepsilon(y_0)$ è un intorno di y_0 . Dunque esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset V$. Essendo U un intorno di x_0 esiste un $\delta > 0$ tale che $\mathbb{B}_\delta(x_0) \subset U$. Dunque $f(\mathbb{B}_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset V$ il che significa che se $x \in A \setminus \{x_0\}$ e $d(x, x_0) < \delta$ allora $f(x) \in V$ cioè $d(y, y_0) < \varepsilon$.

Supponiamo viceversa che valga la seconda proprietà. Se V è un qualunque intorno di y_0 in Y allora Y contiene una palla $\mathbb{B}_\varepsilon(y_0)$ per qualche $\varepsilon > 0$. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbb{B}_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(y_0)$. Dunque posto $U = \mathbb{B}_\delta(x_0)$ vale $\lim f(x) = y_0$ per $x \rightarrow x_0$. \square

Teorema 2.4.5 (cambio di variabile nei limiti). *Siano X, Y, Z spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$, $C \subset Z$ e siano $x_0 \in X$ un punto aderente ad A , $y_0 \in Y$ un punto aderente a B , e $z_0 \in Z$ e siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ tali che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = z_0.$$

Dimostrazione. Si considerino le estensioni $\tilde{f}: A \cup \{x_0\} \rightarrow B \cup \{y_0\}$ e $\tilde{g}: B \cup \{y_0\} \rightarrow C \cup \{z_0\}$. Siccome i limiti di f e g esistono in x_0 e y_0 allora, \tilde{f} e \tilde{g} sono continue in x_0 e y_0 . Per il teorema della continuità della funzione composta, ricaviamo che $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ è continua nel punto x_0 . Ma tale funzione è proprio l'estensione della funzione $f \circ g$ al punto x_0 e dunque anche il limite di $f \circ g$ esiste e vale $\tilde{f}(\tilde{g}(x_0)) = z_0$. \square

2.5 Retta reale estesa

Sarà comodo, nel seguito, considerare oltre ai numeri reali \mathbb{R} i due *infiniti*: $+\infty$ e $-\infty$. Denoteremo con $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ l'insieme dei *numeri reali estesi* (o *retta reale estesa*). Su questo insieme possiamo estendere la relazione d'ordine \leq definita su \mathbb{R} in modo da rendere anche $\bar{\mathbb{R}}$ totalmente ordinato. Poniamo infatti $-\infty \leq x$ e $x \leq +\infty$ per ogni $x \in \bar{\mathbb{R}}$. Possiamo estendere anche la somma a tutte le coppie $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \setminus \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\}$.

2.6 Successioni in spazi topologici

Definizione 2.6.1 (successione). *Sia X uno spazio topologico. Una successione di punti in X è una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow X$. Alternativamente si può dire che una successione è un elemento di $X^{\mathbb{N}}$. Spesso la successione a si indica con $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ o semplicemente con a_k intendendo che k varia tra i numeri naturali.*

Consideriamo l'insieme $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; questo insieme viene naturalmente dotato di una topologia come segue. Dato un punto $n \in \mathbb{N}$ consideriamo come base di intorni di n semplicemente il singoletto $\mathcal{U}_n = \{\{n\}\}$. Una base di intorni di ∞ sia invece $\mathcal{U}_\infty = \{\{j \in \mathbb{N}: j > k\} \cup \{\infty\}: k \in \mathbb{N}\}$. Notiamo quindi che ogni $n \in \mathbb{N}$ è un punto isolato di $\bar{\mathbb{N}}$ al contrario $\infty \in \bar{\mathbb{N}}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N} \subset \bar{\mathbb{N}}$. Una successione è dunque una funzione definita su $\mathbb{N} \subset \bar{\mathbb{N}}$ e ha senso quindi farne il limite per $k \rightarrow \infty$.

Definizione 2.6.2. *Sia X uno spazio topologico e sia x_k una successione di punti di X e $x \in X$. Diremo che x_k converge a x se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x.$$

Esplicitando la definizione degli intorni di ∞ in $\bar{\mathbb{N}}$ si vede che la proprietà $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ è equivalente a richiedere che per ogni V intorno di x esista $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > N$ vale $a_k \in V$.

2.7 Teoremi di compattezza

Definizione 2.7.1 (compattezza sequenziale). *Uno spazio topologico si dice sequenzialmente compatto se da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Definizione 2.7.2 (totale limitatezza). *Uno spazio metrico (X, d) si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito $Y \subset X$ tale che*

$$X \subset \bigcup_{y \in Y} \mathbb{B}_\varepsilon(y).$$

L'insieme Y viene chiamato ε -reticolo di X .

Definizione 2.7.3 (completezza). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione (x_n) in X si dice successione di Cauchy se vale la seguente proprietà:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, n' > N \quad d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon.$$

Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Teorema 2.7.4. *Se (X, d) è uno spazio metrico le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) X è sequenzialmente compatto;
- (ii) X è completo e totalmente limitato;
- (iii) X è compatto.

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Sia dunque X sequenzialmente compatto. È facile mostrare che di conseguenza X è completo, infatti data una successione di Cauchy x_n esiste una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in X$. Ma allora si vede facilmente che l'intera successione x_n converge a \bar{x} .

Mostriamo ora che X è totalmente limitato costruendo un ε -reticolo. Dato $\varepsilon > 0$ costruiamo una successione x_n . Prendiamo $x_1 \in X$ qualsiasi. Poi scegliamo $x_2 \in X \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(x_1)$ e, allo stesso modo $x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_\varepsilon(x_k)$. Continuiamo così finché $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_\varepsilon(x_k)$ non è vuoto. Se tale insieme non fosse mai vuoto, riuscirei infatti a costruire una successione x_n con la proprietà $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ per ogni n, m . È chiaro che tale successione non ammette nessuna sottosuccessione convergente e quindi ciò non può succedere essendo X sequenzialmente compatto.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia R_k un $1/k$ -reticolo finito di X . Definiremo ora, induttivamente, una successione di punti (y_k) con la proprietà $y_k \in R_k$ e tale che $\mathbb{B}_{1/k}(y_k)$ contiene infiniti punti della successione. Definiremo inoltre una sottosuccessione x_{n_k} di x_n tale che $x_{n_k} \in \mathbb{B}_{1/k}(y_k)$.

Essendo R_1 un insieme finito, ed essendo le palle $\{\mathbb{B}_1(y)\}_{y \in R_1}$ un ricoprimento di X , esiste y_1 tale che la palla $\mathbb{B}_1(y_1)$ contiene infiniti punti della successione x_n . Sia x_{n_1} uno di questi punti.

Avendo definito y_k e x_{n_k} sappiamo che $\mathbb{B}_k(y_k)$ contiene infiniti punti della successione, tra cui x_{n_k} . Da questi infiniti punti, tolti quelli con indice minore di n_k rimangono comunque infiniti punti. Come prima sappiamo che una delle palle $\mathbb{B}_{1/(k+1)}(y)$ al variare di $y \in R_{k+1}$ contiene infiniti di questi punti della successione. Sia $x_{n_{k+1}}$ uno di questi.

Questo procedimento, dunque, ci ha permesso di definire una sottosuccessione x_{n_k} , verifichiamo ora che questa successione è di Cauchy. E infatti abbiamo che se $k' > k$ si ha $d(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \leq d(x_{n_k}, y_k) + d(x_{n_{k'}}, y_k) \leq 2/k$ in quanto x_{n_k} e tutti i termini successivi della successione sono contenuti in $\mathbb{B}_{1/k}(y_k)$.

Dimostriamo che se valgono sia (i) che (ii) allora vale (iii). Essendo X totalmente limitato possiamo trovare, per ogni n , un $1/n$ -reticolo R_n per X . Sia $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$; essendo gli R_n insiemi finiti R è numerabile, poniamo $R = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Notiamo ora che R è denso in X , infatti per ogni $x \in X$ esiste un punto $x_n \in R_n$ che dista meno di $1/n$ da x ; dunque $x_n \rightarrow x$ e $x_n \in R$.

Sia $\mathcal{F} = \{A_I\}_{I \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si potrà quindi trovare un aperto $A_n \in \mathcal{F}$ che contiene x_n . L'unione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è un aperto che contiene il denso, quindi deve contenere tutto X . Dunque $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sottoricoprimento numerabile di \mathcal{F} .

Ora scegliamo una sottosuccessione $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nel seguente modo. Prendiamo $n_0 = 0$ e, una volta definiti n_0, \dots, n_k definiamo n_{k+1} come il più piccolo intero maggiore di n_k tale che l'aperto $A_{n_{k+1}}$ non sia contenuto nell'unione

dei precedenti: $\bigcup_{j=0}^k A_{n_j}$. Per concludere la dimostrazione è sufficiente mostrare che questo procedimento termina dopo un numero finito N di passi, perché in tal caso concludo che $A_{n_0} \cup \dots \cup A_{n_N}$ contiene tutti gli aperti della successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e quindi è un ricoprimento finito di X .

Se il procedimento non terminasse, otterrei una successione di aperti $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che ogni aperto della successione non è contenuto nell'unione dei precedenti. Inoltre questa successione costituirebbe ancora un ricoprimento di X in quanto gli aperti che ho tolto dalla successione (A_n) sono tutti contenuti nell'unione di aperti di (A_{n_k}) . Poniamo ora, per semplicità $A_k = A_{n_k}$.

Possiamo dunque scegliere un punto $x_k \in A_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j$. Essendo X sequenzialmente compatto la successione x_k ammette una sottosuccessione convergente ad un punto $\bar{x} \in X$. Dovrà allora esistere un \bar{k} tale che $\bar{x} \in A_{\bar{k}}$ (in quanto $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di X). Ma questo è assurdo perché $x_k \in A_{\bar{k}}$ soltanto quando $k \leq \bar{k}$ e quindi $A_{\bar{k}}$ è un intorno di \bar{x} che contiene solamente un numero finito di punti della successione x_k .

Dimostriamo che (iii) implica (i). Consideriamo una successione x_n di punti di X . Se esiste un punto $x \in X$ tale che ogni intorno di x contiene infiniti punti della successione, allora posso trovare una sottosuccessione di x_n che converge ad x . Supponiamo quindi per ogni $x \in X$ è possibile trovare un intorno aperto B_x di x tale che $\{n: x_n \in B_x\}$ è un insieme finito. Ovviamente gli insiemi B_x al variare di $x \in X$ formano un ricoprimento aperto di X . Essendo X compatto posso estrarre un sottoricoprimento finito B_1, \dots, B_m . Ma ogni B_k contiene solo un numero finito di elementi della successione e quindi nell'unione dei B_k è contenuto solo un numero finito di elementi di x_n il che è assurdo. □

Teorema 2.7.5 (Ascoli Arzelà, versione astratta). *Siano (X, d) e (Y, d) due spazi metrici totalmente limitati. Sia $F \subset \mathcal{C}(X, Y)$ una famiglia di funzioni equicontinue cioè con la seguente proprietà:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \forall f \in F \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Allora F è totalmente limitato (rispetto alla metrica della convergenza uniforme indotta da $\mathcal{C}(X, Y)$).

Prima di fare la dimostrazione mettiamo in evidenza il seguente corollario, che è un enunciato più concreto del precedente teorema.

Corollario 2.7.6 (Ascoli Arzelà). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una successione di funzioni tali che*

1. *esiste $M > 0$ tale che per ogni k e per ogni $x \in \Omega$ si ha $|f_k(x)| \leq M$ (le f_k sono equilimitate);*
2. *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni k si ha (le f_k sono equicontinue)*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Allora esiste una sottosuccessione che converge uniformemente.

Dimostrazione. Sia $Y = [-M, M]$ e $X = \Omega$. Siccome Y e $\bar{\Omega}$ sono compatti in uno spazio metrico separabile essi sono anche totalmente limitati. Poniamo $F = \{f_k: k = 1, 2, \dots\}$. Siccome le funzioni sono equicontinue esse sono, in particolare, continue. Possiamo dunque applicare il teorema precedente per concludere che F è totalmente limitato. Dunque \bar{F} è sequenzialmente compatto e quindi dalla successione data possiamo estrarre una sottosuccessione convergente. □

Vediamo ora la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$ intendiamo trovare un 4ε -reticolo per F . Sia $\delta > 0$ dato in corrispondenza di ε nella definizione di equicontinuità per F . Sia X_δ un δ -reticolo per X e Y_ε un ε -reticolo per Y . Ricordando ora che $Y_\varepsilon^{X_\delta}$ è l'insieme delle funzioni da X_δ in Y_ε , definiamo $G_\varepsilon \subset Y_\varepsilon^{X_\delta}$ come

$$G_\varepsilon = \{g \in Y_\varepsilon^{X_\delta} : \exists f \in F \forall x \in X_\delta \quad d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}.$$

Siccome $Y_\varepsilon^{X_\delta}$ è un insieme finito, anche G_ε lo è, poniamo $G_\varepsilon = \{g_1, \dots, g_N\}$. Sia ora $F_\varepsilon \subset F$, $F_\varepsilon = \{f_1, \dots, f_N\}$ dove $f_k: X \rightarrow Y$ è una funzione di F tale che vale (come garantito dalla definizione di G_ε) $d(f_k(x), g_k(x)) < \varepsilon$ per ogni $x \in X_\delta$.

Dimostriamo ora che F_ε è un 4ε -reticolo per F . Data $f \in F$ scegliamo $g \in Y_\varepsilon^{X_\delta}$ tale che per ogni $x \in X_\delta$ si abbia $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ (questo è possibile in quanto per ogni $x \in X_\delta$ esiste $y \in Y_\varepsilon$ con $d(f(x), y) < \varepsilon$). Ne risulta che $g \in G_\varepsilon$ e quindi $g = g_k$ per un certo $k \in \{1, \dots, N\}$. Notiamo poi che per ogni $x \in X_\delta$ si ha quindi $d(f(x), f_k(x)) \leq d(f(x), g_k(x)) + d(g_k(x), f_k(x)) < 2\varepsilon$.

Scelto ora un $x \in X$ qualunque sappiamo esistere $x_\delta \in X_\delta$ tale che $d(x, x_\delta) < \delta$. Si ha quindi, sfruttando l'equicontinuità di F ,

$$d(f(x), f_k(x)) \leq d(f(x), f(x_\delta)) + d(f_k(x), f_k(x_\delta)) + d(f(x_\delta), f_k(x_\delta)) \leq 4\varepsilon.$$

□

Teorema 2.7.7 (compattezza in L^p). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Un insieme $X \subset L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) è relativamente compatto se e solo se:*

- (i) $\sup_{f \in X} \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$ (equilimitatezza);
- (ii) dato $\varepsilon > 0$ per ogni aperto $U \subset \Omega$ tale che \bar{U} è compatto esiste $\delta > 0$, $\delta < \text{dist}(U, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ tale che per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$ e per ogni $f \in X$ si ha

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$$

dove $\tau_h f$ è la funzione in $L^p(U)$ definita da $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$ (equicontinuità);

- (iii) dato $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\sup_{f \in X} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus K)} < \varepsilon$ (equitensione).

Dimostrazione. Vedi Brezis IV.5. □

Teorema 2.7.8 (compattezza in ℓ^p). *Un insieme $X \subset \ell^p$ ($1 \leq p < \infty$) è relativamente compatto se e solo se:*

- (i) $\sup_{x \in X} \|x\|_{\ell^p} < +\infty$ (equilimitatezza);
- (ii) dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $x \in X$ si ha (equitensione):

$$\sum_{k > N} |x_k|^p < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che X è totalmente limitato. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia N l'intero dato dalla proprietà di equitensione di X per $\frac{\varepsilon}{2}$. Chiaramente l'insieme $\bar{X} := \{(x_1, \dots, x_N) : x \in X\}$ è equilimitato, essendo un insieme limitato di \mathbb{R}^N . Esiste dunque un $\frac{\varepsilon}{2}$ -reticolo \bar{R} per \bar{X} . Verifichiamo che $R := \{(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) : x \in \bar{R}\}$ è un ε reticolo per X . Dato $x \in X$ esiste infatti $\bar{x} \in \bar{R}$ tale che

$$\sum_{k=0}^N |x_k - \bar{x}_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'altra parte per ipotesi

$$\sum_{k>N} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui segue $\|x - \bar{x}\|_{\ell^p} < \varepsilon$. □

2.8 Teoremi di punto fisso

Teorema 2.8.1 (contrazioni). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T: X \rightarrow X$ una contrazione ossia una funzione che verifica:*

$$\exists \lambda < 1 \quad \forall x, y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Allora esiste unico un punto $\bar{x} \in X$ tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dimostrazione. Scegliamo un punto qualunque $x_0 \in X$ e consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza:

$$x_{k+1} = T(x_k) \quad k > 0.$$

Si ha

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda d(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq \lambda^k d(x_1, x_0)$$

e quindi se $m > n > N$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k d(x_1, x_0) \leq \lambda^N d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \lambda^N d(x_1, x_0) \frac{1}{1-\lambda}.$$

Dunque per $N \rightarrow \infty$ si ha $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ovvero la successione $(x_k)_k$ è di Cauchy. Essendo X completo la successione converge ad un punto $\bar{x} \in X$.

Dunque fissato a piacere $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un n per cui $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$ e $d(x_{n+1}, \bar{x}) < \varepsilon$ da cui si trova

$$d(T(\bar{x}), \bar{x}) \leq d(T(\bar{x}), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, \bar{x}) \leq \lambda d(\bar{x}, x_n) + d(x_{n+1}, \bar{x}) \leq 2\varepsilon$$

da cui (essendo la precedente disuguaglianza vera per ogni $\varepsilon > 0$) si ha $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

Supponiamo ora che $T(\bar{y}) = \bar{y}$. Si ha allora

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, T(\bar{x})) + d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) + d(T(\bar{y}), \bar{y}) \leq \lambda d(\bar{x}, \bar{y})$$

da cui, essendo $\lambda < 1$, si ottiene $\bar{y} = \bar{x}$. □

Teorema 2.8.2 (Brouwer o Schauder). *Sia X uno spazio di Banach, $K \subset X$ un insieme compatto convesso e non vuoto, $f: K \rightarrow K$ una funzione continua. Allora f ha un punto fisso.*

Capitolo 3

Spazi vettoriali topologici

3.1 Il differenziale

Siano X e Y spazi di Banach e sia $f: X \rightarrow Y$. Diremo che f è differenziabile in un punto $x_0 \in X$ se esiste una applicazione lineare e continua $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0.$$

Tale applicazione L viene chiamato *differenziale di f nel punto x_0* e si indica con df_{x_0} o $Df(x_0)$.

Proposizione 3.1.1 (Lagrange). *Siano X, Y spazi di Banach e $f: X \rightarrow Y$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in X$. Allora vale*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \leq \|Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \|Df(x_0)\|$$

e passando al lim sup si ottiene la tesi. \square

Teorema 3.1.2 (differenziale della funzione composta). *Siano X, Y, Z spazi di Banach e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione differenziabile in un punto $x_0 \in X$ e $g: Y \rightarrow Z$ una funzione differenziabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f: X \rightarrow Z$ è differenziabile nel punto x_0 e si ha*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

Dimostrazione. Sia $L = Df(x_0)$ e $M = Dg(y_0)$. Bisogna verificare che vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - ML(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - ML(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \\ & \leq \frac{g(f(x)) - g(y_0) - M(f(x) - y_0)}{\|f(x) - f(x_0)\|} \frac{\|f(x) - y_0\|}{\|x - x_0\|} \\ & \quad + \|M\| \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}. \end{aligned}$$

Il primo fattore del primo addendo tende a zero per la differenziabilità di g nel punto y_0 facendo il cambio di variabili $y = f(x)$ e notando che essendo f differenziabile in x_0 si ha che $y \rightarrow y_0$ per $x \rightarrow x_0$. Il secondo fattore del primo addendo risulta al limite limitato da $\|L\|$ per la disuguaglianza di Lagrange. Il secondo addendo tende a zero per la differenziabilità di f nel punto x_0 . \square

3.2 Convergenza uniforme

Sia f_k una successione di funzioni $f_k: X \rightarrow Y$ dove X è uno spazio topologico e Y uno spazio metrico. Data $f: X \rightarrow Y$ diremo che f_k converge uniformemente a f se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: \forall k > N \forall x \in X \quad d_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Si può definire una funzione $d: Y^X \times Y^X \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ definita da

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Data questa definizione, si nota che la convergenza uniforme di f_k verso f è equivalente alla seguente proprietà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, f) = 0.$$

Notiamo che d verifica tutte le proprietà di una distanza a parte il fatto che può verificarsi $d(f, g) = +\infty$. Se però Y è limitato o se invece di tutte le funzioni Y^X consideriamo solo il sottospazio delle funzioni limitate, allora d risulta essere effettivamente una distanza.

Teorema 3.2.1 (continuità del limite uniforme). *Sia X uno spazio topologico, Y uno spazio metrico, $f_k: X \rightarrow Y$ funzioni continue, e $f: X \rightarrow Y$ una funzione qualsiasi. Se $d(f_k, f) \rightarrow 0$ (f_k converge uniformemente a f) allora anche f è una funzione continua.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $x_0 \in X$ in cui vogliamo dimostrare che f è continua. Dato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Siccome $f_k \rightarrow f$ uniformemente sappiamo esistere un indice N tale che $d(f_N, f) < \varepsilon/3$ cioè per ogni $x \in X$ si ha $d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Essendo poi f_N continua in x_0 possiamo trovare un intorno U di x_0 tale che $f_N(U) \subset B_{\varepsilon/3}(f_N(x_0))$ ovvero per ogni $x \in U$ si ha $d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3$. Dunque per ogni $x \in U$ si ha

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

cioè, come voluto, $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. \square

Sfruttando il teorema precedente si può ottenere il seguente fondamentale risultato

Teorema 3.2.2. *Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio metrico completo. Lo spazio $C_b(X, Y)$ delle funzioni continue e limitate $f: X \rightarrow Y$ risulta essere completo rispetto alla metrica d della convergenza uniforme.*

Dimostrazione. Sia f_k una successione di Cauchy per la metrica d in $C_b(X, Y)$. Siccome per ogni $x \in X$ si ha $d_Y(f_k(x), f_j(x)) \leq d(f_k, f_j)$, fissato $x \in X$ la successione $f_k(x)$ è di Cauchy in Y . Essendo Y completo $f_k(x)$ converge in Y ad un punto che chiameremo $f(x)$. Abbiamo dunque definito una funzione $f: X \rightarrow Y$ tale che la successione di funzioni f_k converge puntualmente a f . Sarà sufficiente dimostrare

che la convergenza $f_k \rightarrow f$ è uniforme. Infatti per il teorema precedente questo ci garantisce che la funzione limite f è continua (chiaramente è anche limitata) e dunque la successione f_k converge a f in $C_b(X, Y)$.

Dimostriamo dunque che $f_k \rightarrow f$ uniformemente. Essendo f_k una successione di Cauchy dato $\varepsilon > 0$ sappiamo esistere N tale che per ogni $k, j > N$ si ha $d(f_k, f_j) < \varepsilon/2$. D'altra parte visto che f_k converge puntualmente a f sappiamo che dati $\varepsilon > 0$, $x \in X$ e k esisterà $j > k$ tale che $d(f_j(x), f(x)) < \varepsilon/2$. Dunque mettendo assieme le due proprietà otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà N tale che per ogni $k > N$ e per ogni $x \in X$ esiste $j > k$ tale che contemporaneamente:

$$d(f_k, f_j) < \varepsilon/2, \quad d_Y(f_j(x), f(x)) < \varepsilon/2$$

e quindi

$$d(f_k(x), f(x)) \leq d(f_k, f_j) + d(f_j(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Quest'ultima disuguaglianza non dipende più da j e quindi abbiamo mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $k > N$ e per ogni $x \in X$ si ha $d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$. Questo significa esattamente che $d(f_k, f) \rightarrow 0$. \square

3.3 Serie e derivata discreta

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio (spazio vettoriale) delle successioni a valori in \mathbb{R} . Possiamo definire su questo spazio due operatori $\Delta, \Sigma: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che avranno un ruolo analogo agli operatori di derivata e integrale per le funzioni. Data una successione a_n definiamo

$$\Delta a_n = \begin{cases} a_n - a_{n-1} & \text{se } n > 1 \\ a_1 & \text{se } n = 1, \end{cases} \quad \Sigma a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Chiaramente Δ e Σ sono operatori lineari, e si verifica facilmente che sono uno l'inverso dell'altro.

Come per le derivate, il calcolo di Δ risulta usualmente più semplice di quello di Σ che verrà di conseguenza calcolato come inverso di Δ .

Si ha, per esempio:

$$\Delta n = n - (n-1) = 1, \quad \Delta n^2 = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

da cui si ottiene

$$n = \frac{\Delta n^2 + \Delta n}{2} = \Delta \frac{n^2 + n}{2}.$$

In pratica siamo riusciti a trovare la nota formula

$$\sum_{j=1}^n j = \Sigma n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

E da

$$\Delta n^3 = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - \frac{3}{2}(\Delta n^2 + \Delta n) + \Delta n$$

si ottiene

$$n^2 = \frac{1}{3}\Delta n^3 + \frac{1}{2}\Delta n^2 + \frac{1}{6}\Delta n$$

da cui

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \Sigma n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Tralasciando i passaggi intermedi si trova

$$n^3 = \frac{1}{4}\Delta n^4 + \frac{1}{2}\Delta n^3 + \frac{1}{4}\Delta n^2$$

da cui

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \Sigma n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = (\Sigma n)^2.$$

Si può proseguire induttivamente per trovare la somma di ogni potenza di n . Si noterà che Δn^k è un polinomio completo di grado $k-1$ i cui coefficienti sono i coefficienti binomiali a segni alterni. La potenza n^{k-1} di ordine maggiore avrà coefficiente k . Le potenze n^j di ordine minore $j < k-1$ potranno essere integrate tramite le formule già trovate per Σn^j .

3.4 L'esponenziale di matrici

Sia $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{n,n}$ lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali o complessi. Su \mathbb{M} possiamo mettere la norma delle applicazioni lineari: $\|A\| = \max_{|v| \leq 1} |Av|$; con questa norma \mathbb{M} risulta essere uno spazio di Banach (normato completo).

Teorema 3.4.1 (esponenziale di matrici). *È ben definita la funzione $\exp: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$:*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà.

1. *Le matrici A e $\exp A$ commutano.*
2. *per ogni s, t scalari si ha $\exp((t+s)A) = \exp(tA)\exp(sA)$, in particolare $\exp(A)$ è invertibile e la sua inversa è $\exp(-A)$.*
3. *Fissato $A \in \mathbb{M}$, la funzione $E(t) = \exp(At)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} E'(t) = AE(t) \\ E(0) = \text{id}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Bisogna innanzitutto provare che la serie in questione converge. Per fare questo verifichiamo che la successione delle somme parziali è di Cauchy ovvero che la serie è assolutamente convergente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp \|A\|.$$

Verifichiamo ora che $d/dt \exp(tA) = A \exp(tA)$. Per far questo notiamo che la serie

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

ha come serie delle derivate

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = A \exp(tA).$$

Entrambe le serie convergono totalmente sui compatti $|t| \leq C$ e dunque la serie delle derivate converge alla derivata della serie. Notando anche che $\exp(0) = \text{id}$, abbiamo verificato che $\exp(tA)$ è una soluzione del problema di Cauchy dell'enunciato.

Verifichiamo ora che $\exp(tA)\exp(-tA) = \text{id}$. Innanzitutto questa uguaglianza è banalmente vera per $t = 0$ in quanto $\exp(0) = \text{id}$. Dunque è sufficiente mostrare che le derivate sono uguali. E infatti troviamo $(\exp(tA)\exp(-tA))' = A\exp(tA)\exp(-tA) + \exp(tA)(-A)\exp(-tA) = 0$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che A e $\exp(sA)$ commutano, come si può facilmente notare dalla definizione di \exp .

Verifichiamo ora che $\exp(tA)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy enunciato nel teorema. Sia $E(t)$ una soluzione qualunque del problema di Cauchy in questione. Dunque $E'(t) - AE(t) = 0$. Moltiplicando a sinistra per $\exp(-tA)$ otteniamo la derivata di un prodotto: $(\exp(-tA)E(t))' = 0$. Siccome per $t = 0$ i due fattori sono entrambi uguali a id otteniamo, per ogni t : $\exp(-tA)E(t) = \text{id}$. Moltiplicando a sinistra per $\exp(tA)$ (e ricordando che $\exp(tA)$ è l'inversa di $\exp(-tA)$) otteniamo $E(t) = \exp(tA)$ confermando quindi l'unicità della soluzione.

Dimostriamo ora che $\exp((t+s)A) = \exp(tA)\exp(sA)$. Sia $E(t) = \exp(-sA)\exp((t+s)A)$. Notiamo che $E(0) = \text{id}$ e che $E'(t) = \exp(-sA)A\exp((t+s)A) = AE(t)$. Dunque $E(t)$ è soluzione del solito problema di Cauchy e per l'unicità della soluzione abbiamo $E(t) = \exp(tA)$ che è proprio quello che volevamo mostrare. \square

Cerchiamo ora alcuni strumenti per calcolare più facilmente l'esponenziale di una matrice. Innanzitutto dalla definizione si evince facilmente che se M è invertibile allora

$$\exp(M^{-1}AM) = M^{-1}(\exp A)M.$$

Inoltre se A è una matrice a blocchi del tipo

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \Rightarrow \exp A = \begin{pmatrix} \exp E & 0 \\ 0 & \exp F \end{pmatrix}$$

infatti si nota che i blocchi di A^k sono E^k e F^k e quindi il risultato segue facilmente dalla definizione. In particolare, se $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è una matrice diagonale si ottiene che $\exp(A)$ è anch'essa una matrice diagonale, in particolare $\exp(A) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.

Ricordiamo però che ogni matrice complessa può essere ridotta in forma di Jordan, ovvero è equivalente ad una matrice a blocchi di Jordan. Per calcolare l'esponenziale di una matrice anche non diagonalizzabile, sarà sufficiente saper calcolare l'esponenziale dei blocchi di Jordan. Sia dunque J_λ^n il generico blocco di Jordan:

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.4.2 (esponenziale dei blocchi di Jordan). *Se $J = J_\lambda^n$ è un blocco di Jordan si ha*

$$\exp(tJ) = e^{\lambda t}M(t)$$

dove

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^n/n! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Per comodità poniamo $m_k(t) = t^k/k!$ per $k \geq 0$ e $m_k(t) = 0$ per $k < 0$; in questo modo abbiamo $M_{ij}(t) = m_{j-i}(t)$. Vogliamo ora dimostrare che $M'(t) + \lambda M(t) = JM(t)$. Si ha $M'_{ij}(t) = m'_{j-i}(t) = m_{j-i-1}(t)$. Dunque $M'_{ij}(t) + \lambda M_{ij}(t) = m_{j-i-1}(t) + \lambda m_{ij}(t)$. D'altra parte si ha

$$(JM(t))_{ij} = \sum_k J_{ik} M_{kj}(t) = J_{ii} M_{ij}(t) + J_{i(i+1)} M_{(i+1)j}(t) = \lambda m_{j-i}(t) + m_{j-i-1}(t)$$

e quindi l'asserto è dimostrato. Notiamo quindi che $(M(t)e^{\lambda t})' = JM(t)e^{\lambda t}$ da cui si conclude che $M(t)e^{\lambda t} = \exp(tJ)$. \square

Una applicazione dell'esponenziale di matrici la troveremo in seguito nella risoluzione dei sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

3.5 Algebra lineare

Norme sulle matrici quadrate. Sia A una matrice $n \times n$. Denoteremo con A_k la k -esima riga di A e con A^j la j -esima colonna di A .

Definiamo

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A_k^j)^2}.$$

Notiamo che

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |A^k|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |A_j|^2}$$

E si ha anche

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$$

(dove A^* è la matrice trasposta di A : $(A^*)_k^j = A_k^j$) infatti

$$\text{tr}(AA^*) = \sum_k (AA^*)_k^k = \sum_k \sum_j (A_k^j (A^*)_j^k) = \sum_k \sum_j (A_k^j)^2 = \|A\|_2^2.$$

Un'altra norma che è possibile mettere sulle matrici è la norma uniforme delle applicazioni lineari:

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Av|}{|v|}.$$

Proposizione 3.5.1. *Sia A una matrice $n \times n$. Si ha*

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

Dimostrazione. Per la prima disuguaglianza notiamo che, preso un vettore v con $|v| = 1$, si ha (ricordiamo che $|v^*w|^2 \leq |v|^2|w|^2$ per $v, w \in \mathbb{R}^n$)

$$|Av|^2 = \sum_k |A_k v|^2 \leq \sum_k |A_k|^2 |v|^2 = \sum_k |A_k|^2 = \|A\|_2^2.$$

Per l'altra disuguaglianza, si ha (posto e_k il versore unitario con un 1 al k -esimo posto)

$$\|A\|_2^2 = \sum_k |A_k|^2 = \sum_k |Ae_k|^2 \leq \sum_k \|A\|^2 \leq n\|A\|^2.$$

Notiamo inoltre che è possibile fare semplici esempi in cui valgono le uguaglianze. \square

Lemma 3.5.2 (Lagrange). *Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione derivabile. Allora*

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \sup_{z \in [x, y]} \|Df(z)\|_2 |x - y|.$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Lagrange alle funzioni

$$t \mapsto f^k(tx + (1-t)y)$$

ottenendo che esistono $\xi_k \in [0, 1]$ tali che

$$f^k(x) - f^k(y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\xi_k} f^k(tx + (1-t)y) = Df^k(\xi_k x + (1-\xi_k)y)(x - y),$$

da cui

$$|f^k(x) - f^k(y)|^2 \leq \sup_{z \in [x, y]} |Df^k(z)|^2 |x - y|^2 \leq \sup_{z \in [x, y]} \|Df(z)\|_2^2 |x - y|^2$$

e, sommando su k ,

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq n \sup_{z \in [x, y]} \|Df(z)\|_2^2 |x - y|^2.$$

\square

3.6 Invertibilità locale

Teorema 3.6.1 (criterio di Lipschitz). *Sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 definita su un insieme convesso Ω e supponiamo che si abbia $L = \sup_{x \in \Omega} \|Df(x)\| < +\infty$. Allora la funzione f è L -Lipschitziana, ossia*

$$|f(x') - f(x)| \leq L|x' - x| \quad \forall x, x' \in \Omega.$$

Dimostrazione. Siano $x, x' \in \Omega$ fissati e consideriamo la funzione $g(t) = f(tx' + (1-t)x)$. Chiaramente $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è di classe \mathcal{C}^1 e si ha

$$g'(t) = Df(tx' + (1-t)x)(x' - x).$$

Dalla formula fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$f(x') - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 Df(tx' + (1-t)x) dt (x' - x)$$

da cui segue

$$|f(x') - f(x)| \leq \int_0^1 \|Df(tx' + (1-t)x)\| dt |x' - x| \leq L|x' - x|$$

come volevasi dimostrare. \square

Teorema 3.6.2 (inversione locale). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, sia $x_0 \in \Omega$ e supponiamo che $Df(x_0)$ sia una matrice invertibile. Allora esiste un intorno U di x_0 e un intorno V di $f(x_0)$ per cui $f(U) = V$ e*

$$f|_U: U \rightarrow V$$

è bigettiva, la sua inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ è differenziabile e se $f(x) = y$ (con $x \in U$) si ha

$$D(f^{-1}(y)) = (Df(x))^{-1}.$$

Dimostrazione. Sia $A = (Df(x_0))^{-1}$. Siccome Ω è aperto e $Df: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continuo, possiamo scegliere $\rho > 0$ in modo che

$$\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} \subset \Omega \quad \text{e} \quad \|Df(x) - Df(x_0)\| \leq \frac{1}{2\|A\|} \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}.$$

Poniamo $r = \frac{\rho}{2\|A\|}$ e $y_0 = f(x_0)$. Fissato $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} T: \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ T(x) &= x + A(y - f(x)). \end{aligned}$$

Si ha, per $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$,

$$\|DT(x)\| = \|\text{id} - ADf(x)\| \leq \|A\| \cdot \|Df(x_0) - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

e quindi, per il criterio di Lipschitz, la funzione T è $\frac{1}{2}$ -Lipschitziana (ossia una contrazione).

Verifichiamo anche che $T(\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}) \subset \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$. Infatti, per $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$, si ha

$$\begin{aligned} |T(x) - x_0| &\leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - y_0)| \leq \frac{\rho}{2} + \|A\|r \leq \rho. \end{aligned}$$

Dunque $T: \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} \rightarrow \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ è una contrazione, $\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ è uno spazio metrico completo e quindi, per il Teorema delle contrazioni, esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$T(x) = x,$$

cioè esiste un unico punto x in $\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ per cui $f(x) = y$.

Dato $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ possiamo dunque trovare un $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ che risolve $f(x) = y$, chiamiamo g l'applicazione $y \mapsto x$

$$g: \mathbb{B}_r(y_0) \rightarrow \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}, \quad f(g(y)) = y.$$

Poniamo dunque $V = \mathbb{B}_r(y_0)$ e $U = g(V)$. Chiaramente $f|_U: U \rightarrow V$ è bigettiva e ha g come inversa.

Vogliamo ora dimostrare che g è differenziabile in ogni punto $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ e che il suo differenziale $Dg(y)$ è uguale a $Df(x)^{-1}$ con $x = g(y)$; ossia

$$\lim_{y' \rightarrow y} \frac{g(y') - g(y) - Df(x)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0.$$

Dato $y' \in \mathbb{B}_r(y_0)$, posto $x' = g(y')$ stiamo considerando la seguente quantità

$$\frac{g(y') - g(y) - Df(x)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(f(x') - f(x))}{|y' - y|}$$

che per la differenziabilità di f in x possiamo scrivere come

$$\begin{aligned} &= \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(Df(x)(x' - x) + o(|x' - x|))}{|y' - y|} \\ &= \frac{Df(x)^{-1}o(|x' - x|)}{|y' - y|} = \frac{Df(x)^{-1}o(|x' - x|)}{|x' - x|} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vogliamo ora dimostrare che per $y' \rightarrow y$ si ha $x' \rightarrow x$ cosicché il primo termine di quest'ultimo prodotto tende a zero per la definizione di o "piccolo". Contemporaneamente dimostreremo che il secondo termine è limitato.

Per fare questo consideriamo la mappa T definita in precedenza e per la quale si ha $T(x) = x$. Ricordando che T è $1/2$ -lipschitziana si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x' - x| &\geq |T(x') - T(x)| = |x' + Df(x)(y - f(x')) - x| \\ &\geq |x' - x| - |Df(x)(y - f(x'))| = |x' - x| - \|Df(x)\| |y - y'| \end{aligned}$$

da cui

$$|x' - x| \leq \frac{|y' - y|}{2\|Df(x)\|}.$$

Questo da un lato ci dice che se $y' \rightarrow y$ allora anche $x' \rightarrow x$ e dall'altro ci dice che il rapporto $|x' - x|/|y' - y|$ è limitato. Dunque la quantità in (3.1) tende a zero, la funzione g è differenziabile in y e il suo differenziale è $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Per concludere che $g \in \mathcal{C}^1$ rimane solo da provare che il differenziale Dg è una funzione continua. Ma dato che $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$, si osserva che essendo g continua (in quanto differenziabile), essendo Df continua (per ipotesi) ed essendo continua anche l'operazione di inversione di una matrice, la funzione Dg deve essere continua.

L'ultima osservazione è che U risulta essere un intorno di x_0 . Infatti $U = g^{-1}(V)$, ed essendo V aperto e g continua, concludiamo che anche U è aperto. \square

Teorema 3.6.3 (funzione implicita, Dini). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e sia $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Se la matrice $D_y f(x_0, y_0)$ delle derivate di $f(x, y)$ rispetto alle variabili y*

$$D_y f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f^j}{\partial y^k}(x_0, y_0) \right)_{j,k} \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, m$$

è invertibile, allora esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 e una funzione $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) \quad \forall x \in U.$$

Inoltre, per $y = g(x)$ si ha

$$Dg(x) = -D_y f(x, y)^{-1} D_x f(x, y).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y)).$$

si trova facilmente che

$$D\tilde{f}(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \text{id} & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array} \right)$$

dove id è la matrice identità $n \times n$. Dunque essendo $D_y f(x_0, y_0)$ invertibile, anche $D\tilde{f}(x_0, y_0)$ lo è e posso applicare il teorema di invertibilità locale a \tilde{f} . Dunque esisterà una funzione g di classe \mathcal{C}^1 in un intorno di $(x_0, f(x_0, y_0))$ tale che

$\tilde{f}(\tilde{g}(x, y)) = (x, y)$. Posto $\tilde{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ con g_1 a valori in \mathbb{R}^n , e g_2 a valori in \mathbb{R}^m si ha dunque

$$(x, y) = \tilde{f}(g_1(x, y), g_2(x, y)) = (g_1(x, y), f(g_1(x, y), g_2(x, y)))$$

da cui si ottiene $g_1(x, y) = x$ e $f(x, g_2(x, y)) = y$. Basterà dunque porre $g(x) = g_2(x, f(x_0, y_0))$ per ottenere $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$.

Per dimostrare la formula di calcolo di Dg è sufficiente differenziare l'equazione

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$$

per ottenere

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))Dg(x) = 0$$

da cui la tesi. □

3.7 Equazioni differenziali

Teorema 3.7.1 (soluzione dell'equazione lineare del prim'ordine in forma normale). *Sia I un intervallo di \mathbb{R} e siano f, g funzioni continue su I . Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$u'(x) = f(x)u(x) + g(x)$$

sono definite su I e sono della forma

$$u(x) = e^{F(x)}(G(x) + c)$$

dove F e G sono univocamente determinate dalle condizioni $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)e^{-F(x)}$ e c è una costante arbitraria.

Dimostrazione. Moltiplicando l'equazione differenziale per $e^{-F(x)}$ otteniamo

$$u'(x)e^{-F(x)} - f(x)u(x)e^{-F(x)} = g(x)e^{-F(x)}$$

cioè

$$(u(x)e^{-F(x)})' = G'(x)$$

essendo questa relazione vera su un insieme connesso I si ricava, per qualche costante c

$$u(x)e^{-F(x)} = G(x) + c$$

che è la tesi del teorema □

Teorema 3.7.2 (indipendenza delle soluzioni). *Siano u_1, \dots, u_n funzioni derivabili n -volte su un intervallo I , soluzioni dell'equazione differenziale*

$$u^{(n)}(x) = a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x),$$

e si definisca quindi la matrice wronskiana

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Allora sono equivalenti

1. le funzioni u_1, \dots, u_n sono vettori indipendenti dello spazio $\mathcal{C}^n(I)$;
2. esiste un punto $x_0 \in I$ tale che $\det W(x_0) \neq 0$;
3. per ogni $x \in I$ si ha $\det W(x) \neq 0$.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che se $\det W(x_0) \neq 0$ allora u_1, \dots, u_n sono indipendenti (si noti che a questo scopo non è necessario supporre che le u_1, \dots, u_n siano soluzioni dell'equazione differenziale). Supponiamo quindi di avere una combinazione lineare

$$c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) = 0.$$

Derivando $n - 1$ volte e valutando le n equazioni in x_0 si ottiene il sistema

$$W(x_0) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Essendo $\det W(x_0) \neq 0$ allora il sistema ha come unica soluzione $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Ci resta ora solo da dimostrare che se u_1, \dots, u_n sono indipendenti allora per ogni $x \in I$ si ha $\det W(x) \neq 0$. Per far questo mi sa che è proprio necessario usare il teorema di Cauchy sull'esistenza e unicità... \square

Lemma 3.7.3 (rappresentazione reale delle soluzioni). *Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\text{span}_{\mathbb{C}}(e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}) = \text{span}_{\mathbb{C}}(e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)).$$

3.7.1 Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti

Teorema 3.7.4 (soluzione generale sistema lineare a coefficienti costanti). *Il sistema*

$$u'(x) = Au(x)$$

ha come soluzioni

$$u(x) = \exp(xA)u_0$$

dove u_0 è un qualunque vettore costante.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che le funzioni $u(x) = \exp(xA)u_0$ sono tutte soluzioni, infatti $u'(x) = A \exp(xA)u_0 = Au(x)$. Sia ora $u(x)$ una generica soluzione di $u'(x) = Au(x)$. Notiamo che $(\exp(-xA)u(x))' = -A \exp(-xA)u(x) + \exp(xA)Au(x) = 0$, ed essendo $\exp(0)u(0) = u(0)$ si ha $u(x) = \exp(xA)u(0)$. Dunque $u(x)$ è una delle soluzioni già trovate. \square

3.7.2 Equazioni differenziali lineari di ordine n

In questa sezione porremo $X = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, uno spazio vettoriale di dimensione infinita sul campo \mathbb{C} . Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ e un intero non negativo m definiamo i seguenti sottospazi vettoriali di X :

$$V_\lambda^m = \{p(x)e^{\lambda x} : p(x) \in \mathbb{C}[x], \deg p < m\}.$$

Notiamo che V_λ^m ha dimensione m ; notiamo inoltre che V_0^m è lo spazio dei polinomi complessi di grado strettamente minore di m .

Nel seguito considereremo l'operatore $(D - \lambda): X \rightarrow X$ definito da $(D - \lambda)u(x) = u'(x) - \lambda u(x)$ per ogni $u \in X$; Notiamo fin da ora che vale la seguente proprietà:

$$(D - \lambda)p(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} Dp(x).$$

Lemma 3.7.5. *Presi $\mu, \lambda \in C$, $\mu \neq \lambda$ e n, m interi non negativi, si ha*

$$(D - \lambda)^m(V_\mu^n) = V_\mu^n;$$

ovvero $(D - \lambda)^m$ ristretto a V_μ^n è un automorfismo di V_μ^n .

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che preso $u \in V_\mu^n$ si ha $(D - \lambda)u \in V_\mu^n$. Posto $u(x) = p(x)e^{\mu x}$ si ha $(D - \lambda)p(x)e^{\mu x} = e^{\mu x}(D - \lambda + \mu)p(x) = e^{\mu x}q(x) \in V_\mu^n$ essendo il grado di q non maggiore di quello di p . D'altra parte preso $u \in V_\mu^n$, $u(x) = p(x)e^{\mu x}$ l'equazione $(D - \lambda)u = 0$ è equivalente a $(D - \lambda + \mu)p(x) = 0$ cioè $p'(x) = (\lambda - \mu)p(x)$. Se p fosse diverso da zero il polinomio a sinistra dell'uguaglianza avrebbe grado strettamente minore di quello a destra e dunque necessariamente $p = 0$ e quindi $u = 0$. Dunque $(D - \lambda)$ è iniettivo su V_μ^n e di conseguenza è anche surgettivo. Iterando m volte si ottiene che anche $(D - \lambda)^m$ ristretto a V_μ^n è iniettivo e surgettivo. \square

Lemma 3.7.6.

$$\ker(D - \lambda)^m = V_\lambda^m.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per induzione su m . Per $m = 0$ notiamo che $V_\lambda^0 = \{0\}$ e infatti $(D - \lambda)^0$ è per convenzione l'identità.

Supponiamo ora di sapere, per induzione, che $\ker(D - \lambda)^{m-1} = V_\lambda^{m-1}$.

Mostriamo che $\ker(D - \lambda)^m \subset V_\lambda^m$. Preso $u \in \ker(D - \lambda)^m$ si ha $(D - \lambda)(D - \lambda)^{m-1}u = 0$ da cui $(D - \lambda)u \in \ker(D - \lambda)^{m-1} = V_\lambda^{m-1}$ e quindi $(D - \lambda)u(x) = p(x)e^{\lambda x}$ con p polinomio di grado minore di $m-1$. Moltiplicando ambo i membri per $e^{-\lambda x}$ si ottiene $(u(x)e^{-\lambda x})' = p(x)$ da cui $u(x)e^{-\lambda x} = q(x)$ dove q è un polinomio di grado minore di m tale che $q' = p$. In conclusione abbiamo trovato che $u(x) = q(x)e^{\lambda x}$ e quindi $u \in V_\lambda^m$.

Preso invece $u \in V_\lambda^m$ potremo scrivere $u(x) = q(x)e^{\lambda x}$. Troviamo quindi $(D - \lambda)u(x) = q'(x)e^{\lambda x} \in V_\lambda^{m-1} = \ker(D - \lambda)^{m-1}$ da cui $u \in \ker(D - \lambda)^m$. \square

Lemma 3.7.7. *Sia X uno spazio vettoriale, V un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita, $T: X \rightarrow X$ un operatore lineare tale che $T(V) = V$ (T ristretto a V è un automorfismo di V). Allora $T^{-1}(V) = \ker T \oplus V$.*

Dimostrazione. Sia $u \in T^{-1}(V)$. Poniamo $v = T(u)$, $v \in V$. Essendo V di dimensione finita esiste un unico $w \in V$ tale che $T(w) = v$. Dunque $T(u - w) = T(u) - T(w) = 0$ da cui $w - u \in \ker T$. Abbiamo quindi verificato che $u = (u - w) + w$ sta in $\ker T + V$. Prendendo ora $v \in \ker T \cap V$; si ha ovviamente $T(v) = 0$, d'altra parte T ristretto a V è un automorfismo di V e quindi $v = 0$. Dunque $\ker T \cap V = \{0\}$ da cui $\ker T + V = \ker T \oplus V$. \square

Lemma 3.7.8. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ numeri complessi distinti e m_1, \dots, m_k interi non negativi. Allora*

$$\ker \prod_{j=1}^k (D - \lambda_j)^{m_j} = \bigoplus_{j=1}^k V_{\lambda_j}^{m_j}.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per induzione su k . Da un lemma precedente sappiamo che $\ker(D - \lambda_k)^{m_k} = V_{\lambda_k}^{m_k}$. Posto $T = \prod_{j=1}^{k-1} (D - \lambda_j)^{m_j}$ e $V = \bigoplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}^{m_j}$ si ha, applicando il lemma precedente,

$$\begin{aligned} \ker((D - \lambda_k)^{m_k} T) &= \{u \in X : (D - \lambda_k)^{m_k} u \in \ker T\} \\ &= (D - \lambda_k)^{-m_k}(V) = \ker(D - \lambda_k)^{m_k} \oplus V. \end{aligned}$$

\square

Teorema 3.7.9 (soluzione generale dell'omogenea). *Tutte e sole le soluzioni complesse dell'equazione lineare omogenea di grado n , a coefficienti complessi costanti*

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1u'(x) + a_0u(x) = 0$$

sono della forma

$$u(x) = p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le soluzioni complesse distinte del polinomio associato

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

m_1, \dots, m_k sono le rispettive molteplicità ($m_1 + \dots + m_k = n$) e p_1, \dots, p_k sono polinomi qualunque a coefficienti complessi di grado strettamente minore, rispettivamente, di m_1, \dots, m_k .

Dimostrazione. Essendo $p(z) = \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{m_j}$ l'equazione differenziale diventa

$$\prod_{j=1}^k (D - \lambda_j)^{m_j} u = 0$$

e quindi il lemma precedente dà esattamente il risultato desiderato. \square

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ e m intero non negativo definiamo l'operatore $T_\lambda^m: X \rightarrow X$ come

$$(T_\lambda^m u)(x) = (D - \lambda)^m (x^m u(x)).$$

Lemma 3.7.10.

$$T_\lambda^m (V_\lambda^n) = V_\lambda^n.$$

Dimostrazione. Prendiamo $u \in V_\lambda^n$, $u(x) = p(x)e^{\lambda x}$. Si ha $T_\lambda^m u(x) = (D - \lambda)^m (x^m p(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} D^m x^m p(x) = q(x)e^{\lambda x}$ da cui si vede che $T_\lambda^m(u) \in V_\lambda^n$ in quanto il grado di $q(x) = D^m x^m p(x)$ è uguale al grado di p . D'altra parte se $T_\lambda^m(u) = 0$ dovrà essere $q = 0$ e quindi $D^m x^m p(x) = 0$. Se p fosse diverso da zero si avrebbe un assurdo in quanto l'operatore $p(x) \mapsto D^m x^m p(x)$ non fa diminuire il grado. Concludiamo che T_λ^m ristretto a V_λ^n è iniettivo e quindi è anche surgettivo. \square

Teorema 3.7.11 (soluzione particolare della non omogenea). *L'equazione differenziale*

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1u'(x) + a_0u(x) = \bar{p}(x)e^{\lambda x}$$

dove $\bar{p}(x)$ è un polinomio, ha una soluzione particolare del tipo

$$u(x) = x^m \bar{q}(x)e^{\lambda x}$$

dove \bar{q} è un polinomio dello stesso grado di \bar{p} e m è la molteplicità di λ come radice del polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ($m = 0$ se $p(\lambda) \neq 0$).

Dimostrazione. Sia $p(z) = (z - \lambda)^m \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{m_j}$. Dobbiamo dimostrare che esiste $v \in V_\lambda^n$ tale che $u(x) = x^m v(x)$ è soluzione di $p(D)u(x) = \bar{p}(x)e^{\lambda x}$ dove $n = \deg \bar{p}$. Ovvero dobbiamo dimostrare che

$$\prod_{j=1}^k (D - \lambda_j)^{m_j} T_\lambda^m (V_\lambda^n) = V_\lambda^n.$$

Il lemma precedente ci dice che $T_\lambda^m (V_\lambda^n) = V_\lambda^n$ mentre da un lemma ancora precedente già sapevamo che $(D - \lambda_j)^{m_j} (V_\lambda^n) = V_\lambda^n$ essendo $\lambda_j \neq \lambda$. \square

3.7.3 Equazioni non lineari

Lemma 3.7.12. *Siano dati $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $R \in]0, +\infty]$, $L > 0$. Posto $I = [x_0, x_0 + \delta]$ (oppure $I = [x_0, x_0 - \delta]$) sia data $f: I \times \mathbb{B}_R(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (se $R = +\infty$ intendiamo $\mathbb{B}_R(y_0) = \mathbb{R}^n$). Posto $M = \max\{|f(x, y_0)|: x \in I\}$ supponiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:*

- f è continua;
- per ogni $x \in I$, $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_R(y_0)$ vale $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ (lipschitzianità rispetto a y uniforme rispetto a x);
- $\delta < R/M$.

Allora esiste una unica funzione derivabile $y: I \rightarrow \mathbb{B}_R(y_0)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Innanzitutto verifichiamo che y è soluzione del problema di Cauchy se e solo se y verifica la seguente equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Infatti se y è una soluzione del problema di Cauchy, integrando l'equazione $y'(t) = f(t, y(t))$ tra x_0 e x e ricordando che $y(x_0) = y_0$ si ottiene l'equazione integrale.

Se invece y è soluzione dell'equazione integrale, notiamo innanzitutto che y è continua. Infatti il termine di destra è continuo per la continuità dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione. Essendo y continua ne segue che anche $f(t, y(t))$ è una funzione continua in t . Dunque possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale derivando membro a membro per ottenere l'equazione differenziale in questione. Si verifica inoltre banalmente che vale $y(x_0) = y_0$.

Definiamo ora per induzione una successione di funzioni $y_k: I \rightarrow \mathbb{B}_R(y_0)$ nel seguente modo:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt.$$

Dobbiamo dimostrare che questa è una buona definizione, nel senso che per ogni $x \in I$ dovrà essere $y_k(x) \in \mathbb{B}_R(y_0)$. Dimostriamo questo per induzione. Per $k = 0$ si ha $y_0(x) = y_0 \in \mathbb{B}_R(y_0)$. Supponendo ora che $y_k(x) \in \mathbb{B}_R(y_0)$ per ogni $x \in I$ notiamo che

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t))| dt \leq M|x - x_0| \leq M\delta < R$$

da cui segue $y_{k+1}(x) \in \mathbb{B}_R(y_0)$.

Dimostriamo ora per induzione la seguente proprietà:

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}.$$

Per $k = 0$ si ha

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0|.$$

Supposta vera la disuguaglianza per k otteniamo per $k + 1$:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \\ &\leq L \int_{x_0}^x \frac{ML^{k-1}}{k!} |t - x_0|^k dt = \frac{ML^k}{k!} \frac{1}{1+k} |x - x_0|^{k+1} \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza cercata. Questo ci dice che la successione y_k è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme su I . Infatti notiamo che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| \leq \frac{M}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{M}{L} (e^{L\delta} - 1) < +\infty$$

è convergente. Dunque i resti k -esimi della serie sono infinitesimi il che significa che $\|y_{k+j} - y_k\|$ è infinitesimo in k .

Dunque abbiamo provato che la successione y_k converge ad una funzione continua $\bar{y}: I \rightarrow \mathbb{B}_R(y_0)$. D'altra parte l'operatore $y \mapsto T(y)$, che alla funzione y associa la funzione $T(y)$ definita da $T(y)(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ è continuo rispetto alla convergenza uniforme (infatti $\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq L\delta \|y_1 - y_2\|$) ed essendo per ogni k $y_{k+1} = y_0 + T(y_k)$ si ottiene, passando al limite, $\bar{y} = y_0 + T(\bar{y})$. Dunque \bar{y} è una soluzione del problema integrale.

Verifichiamo ora che tale soluzione è unica. Supponiamo che esista un'altra soluzione y del problema integrale diversa da \bar{y} . Sia $\bar{x} = \max\{x \in I : y(x) = \bar{y}(x)\}$. Sicuramente questo massimo esiste, essendo y e \bar{y} funzioni continue, ed è $\bar{x} > x_0$. Scegliamo poi $x \in [\bar{x}, \bar{x} + 1/(2L)]$ in modo che sia $|y(x) - \bar{y}(x)| = \max\{|y(t) - \bar{y}(t)| : t \in [\bar{x}, \bar{x} + 1/(2L)]\}$.

Allora

$$\begin{aligned} |y(x) - \bar{y}(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| dt = \int_{\bar{x}}^x |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| dt \\ &\leq |x - \bar{x}| L \max_{t \in [\bar{x}, x]} |y(t) - \bar{y}(t)| = L|x - \bar{x}| \cdot |y(x) - \bar{y}(x)| \\ &\leq |y(x) - \bar{y}(x)|/2 \end{aligned}$$

il che è assurdo. □

Teorema 3.7.13 (Cauchy, esistenza e unicità locale). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Supponiamo che f sia lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima, cioè che esista $L > 0$ tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in \Omega$. Sia poi $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Allora esistono $\delta > 0$, $R > 0$ tali che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \mathbb{B}_R(y_0) \subset \Omega$ e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

ha una unica soluzione $y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{B}_R(y_0)$ nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Dimostrazione. Sia $K \subset \Omega$ un intorno compatto del punto (x_0, y_0) e sia $M = \max_K |f|$. Scegliamo ora $R > 0$ e $\delta > 0$ abbastanza piccoli in modo che si abbia $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \mathbb{B}_R(y_0) \subset \Omega$ e $\delta < R/M$. Applicando il lemma precedente otteniamo il risultato desiderato. □

Teorema 3.7.14 (Cauchy, esistenza e unicità globale). *Sia $[a, b]$ un intervallo di \mathbb{R} , $x_0 \in [a, b]$ e sia $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e L -lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima. Allora il solito problema di Cauchy ha una unica soluzione definita su tutto $[a, b]$.*

Dimostrazione. Basta applicare il lemma con $R = +\infty$. □

La seguente è una dimostrazione alternativa del teorema di Cauchy.

Teorema 3.7.15 (Cauchy, esistenza e unicità). *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f: \mathbb{B}_r(x_0) \times \mathbb{B}_R(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

(i) f è continua;

(ii) $f(x, y)$ è L -lipschitziana in y uniformemente rispetto a x ovvero:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in \mathbb{B}_r(x_0) \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{B}_R(y_0).$$

Allora, posto $M = \|f\|_\infty$, e $\rho = \min\{R, 1/L, R/M\}$ esiste una unica funzione $y \in C^1(\mathbb{B}_\rho(x_0), \mathbb{B}_R(y_0))$ che verifica

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in \mathbb{B}_\rho(x_0) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Si noti che se al posto di (i) ponessimo solamente $f(x, y)$ continua rispetto a x , per la proprietà (ii) si avrebbe comunque che f è continua.

Dimostrazione. Sia $X = \mathcal{C}(\mathbb{B}_\rho(x_0), \overline{\mathbb{B}_R(y_0)})$, e si consideri la mappa $T: X \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{B}_\rho(x_0), \mathbb{R})$ definita da

$$T(y)(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Osserviamo che $T(y) = y$ se e solo se y verifica il sistema (3.2). Infatti se $T(y) = y$, chiaramente si ha $y(x_0) = y_0$ e derivando si ottiene $y'(x) = f(x, y(x))$. D'altra parte se y verifica (3.2) allora integrando si ottiene proprio $y = Ty$.

Verifichiamo dunque che T è una contrazione:

$$|(T(y_1) - T(y_2))(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \leq \rho L \|y_1 - y_2\|_\infty$$

ed essendo $\rho L < 1$ ne consegue che T è effettivamente una contrazione.

Verifichiamo ora che $T(X) \subset X$. Sia dunque $y \in X$, cioè $|y(x) - y_0| \leq R$ per ogni $x \in \mathbb{B}_\rho(x_0)$. Si avrà allora

$$|T(y)(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \leq \rho M \leq R.$$

Dunque T ammette un unico punto fisso y che è la soluzione del nostro problema. □

3.8 L'integrale di Lebesgue

Per quanto riguarda l'integrale di Riemann si ha il seguente risultato

Teorema 3.8.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni limitate, Riemann-integrabili, definite su un intervallo limitato I a valori in \mathbb{R} . Se f_n converge uniformemente ad una certa funzione f , allora f è Riemann-integrabile e vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

I seguenti esempi mostrano che, nel teorema precedente, la limitatezza dell'intervallo e delle funzioni sono necessarie:

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto n \chi_{]0, \frac{1}{n}]}(x). \end{aligned}$$

La necessità di avere migliori proprietà di passaggio al limite per gli integrali è stata la principale motivazione della nascita dell'integrale di Lebesgue. Vediamo brevemente la definizione di integrale di Lebesgue.

Sia (X, μ) uno spazio misurabile. Diremo che una funzione $s: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è una funzione semplice se la sua immagine è un insieme finito, cioè se esistono $E_1, \dots, E_n \subset X$ e $s_1, \dots, s_n \in [-\infty, +\infty]$ tali che

$$s(x) = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k}(x).$$

Se s è una funzione semplice misurabile allora gli insiemi E_k sono misurabili e possiamo quindi definire

$$I(s) = \sum_{k=1}^n s_k \mu(E_k).$$

Data una funzione misurabile $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ definiamo l'integrale di Lebesgue di f su X come

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sup_{0 \leq s \leq f} I(s)$$

dove s varia tra tutte le funzioni semplici misurabili $0 \leq s \leq f$. Si noti che $\int_X f(x) d\mu(x) \in [0, +\infty]$. La definizione non poteva essere data con l'inf degli integrali delle funzioni semplici maggiori di f , perché funzioni come $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ non sono maggiorate da alcuna funzione semplice! Però se $\mu(x) < \infty$ e $f(x) \leq M$, sapendo che $\int f = \int M - \int (M - f)$ si trova facilmente che $\int_X f(x) d\mu(x) = \inf_{s \geq f} I(s)$. Dunque non è necessario definire gli integrali superiore e inferiore come si faceva con l'integrale di Riemann.

Se $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ diciamo che $f \in L^1(X)$ se $\int_X |f(x)| d\mu(x) < +\infty$ e posto $f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \geq 0$ definiamo

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x).$$

Si noti dunque che se $f \in L^1(X)$ allora $\int_X f d\mu \in]-\infty, +\infty[$.

Teorema 3.8.2 (Beppo Levi). *Sia (X, μ) uno spazio misurabile, e sia $\{f_n\}$ una successione crescente di funzioni misurabili su X a valori in $[0, +\infty]$. Allora si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x).$$

Dimostrazione. Innanzi tutto, essendo la successione $n \mapsto f_n$ crescente e l'integrale monotono, entrambi i limiti esistono e coincidono con gli estremi superiori. Posto quindi

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x)$$

si nota immediatamente che f è una funzione misurabile, in quanto estremo superiore di funzioni misurabili. Inoltre essendo

$f_n \leq f$ per ogni n , per la monotonia dell'integrale si ha,

$$\sup_n \int_X f_n d\mu(x) \leq \int_X f(x) d\mu(x). \quad (3.3)$$

Prendiamo una qualsiasi funzione semplice misurabile s , con $0 \leq s \leq f$. Scelto $\alpha < 1$ poniamo poi

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Gli insiemi E_n sono misurabili e sono una successione crescente che (essendo $\sup_n f_n(x) = f(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$) invade tutto lo spazio X , inoltre si ha

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \geq \int_{E_n} f_n(x) d\mu(x) \geq \alpha \int_{E_n} s(x) d\mu(x). \quad (3.4)$$

Essendo s una funzione semplice è facile verificare che la funzione $E \mapsto \int_E s(x) d\mu(x)$ è una misura quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s(x) d\mu(x) = \int_X s(x) d\mu(x)$$

e passando al limite nella disuguaglianza (3.4) si ottiene

$$\sup_n \int_X f_n(x) d\mu(x) \geq \alpha \int_X s(x) d\mu(x).$$

Siccome quest'ultima disuguaglianza è vera per ogni scelta di $\alpha < 1$ e per ogni funzione semplice misurabile $s \leq f$ si ha

$$\sup_n \int_X f_n(x) d\mu(x) \geq \int_X f(x) d\mu(x)$$

che insieme a (3.3) ci dà la tesi. \square

Teorema 3.8.3 (Lemma di Fatou). *Sia (X, μ) uno spazio misurabile e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X a valori in $[0, +\infty]$. Allora*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$, dalla definizione di limite superiore si ha

$$f(x) = \sup_n g_n(x).$$

Siccome g_n è una successione crescente di funzioni misurabili possiamo applicare il Teorema di Beppo Levi, ottenendo

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x)$$

ma, d'altra parte, essendo $g_n \leq f_n$, si conclude notando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

\square

Un esempio di come nella tesi del teorema precedente possa non esserci l'uguaglianza è dato dalla successione

$$f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x).$$

Teorema 3.8.4 (Lebesgue, convergenza dominata). *Sia (X, μ) uno spazio misurabile e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili $f_n: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e supponiamo che per ogni x esista il limite*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Supponiamo inoltre che esista una funzione $g \in L^1(X)$ tale che $|f_n| \leq g$ per ogni n . Allora $f \in L^1(X)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0.$$

Dimostrazione. Dalle stabilità delle funzioni misurabili per passaggi al limite sappiamo che f è una funzione misurabile. Si ha, sfruttando il Lemma di Fatou,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f(x) - f_n(x)| d\mu(x) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f(x) - f_n(x)| d\mu(x) \\ &= -\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X -|f(x) - f_n(x)| d\mu(x) \\ &= \int_X 2g(x) d\mu(x) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X 2g(x) - |f(x) - f_n(x)| d\mu(x) \\ &\leq \int_X 2g(x) d\mu(x) - \int_X 2g(x) - \limsup_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| d\mu(x) \\ &= \int_X 2g(x) d\mu(x) - \int_X 2g(x) d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8.5 (scambio derivata e integrale). *Sia (Y, μ) uno spazio misurabile, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia data $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \Omega$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ sia misurabile.*

Sia

$$F(x) = \int_E f(x, y) dy.$$

Se esiste $g \in L^1(Y)$ tale che per ogni $x \in \Omega$ $|f(x, y)| \leq g(y)$ e se $x \mapsto f(x, y)$ è continua per ogni $y \in Y$, allora $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Se inoltre $x \mapsto f(x, y)$ è differenziabile in Ω per ogni $y \in Y$ e esistono $g_1, \dots, g_n \in L^1(Y)$ tali che $\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) \right| \leq g_k(y)$ allora $F \in C^1(\Omega)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) dy \quad \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Sia $(x_h)_h$ una successione in Ω tale che $x_h \rightarrow x \in \Omega$. Applicando il teorema di Lebesgue alle funzioni $f_h(y) = f(x_h, y)$ si ottiene $F(x_h) \rightarrow F(x)$. Dunque F è continua.

Dimostriamo ora la seconda parte. Fissiamo un punto $x \in \Omega$, una successione $\varepsilon_h \rightarrow 0$ e sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n . Sia poi $\xi_h(y) \in [0, \varepsilon_h]$ tale che (per il teorema di Lagrange)

$$\frac{f(x + \varepsilon_h e_k, y) - f(x, y)}{\varepsilon_h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + \xi_h(y) e_k, y).$$

Posto $f_h(y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + \xi_h(y), y)$ si ha che $|f_h(y)| \leq g_k(y)$ per ogni h e $f_h(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y)$. Applicando dunque il teorema di Lebesgue alle f_h si ottiene dunque

$$\frac{F(x + \varepsilon_h e_k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_h} = \int_Y f_h(y) dy \rightarrow \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) dy.$$

Dunque F è derivabile nella direzione k , e inoltre $\partial F/\partial x_k$ è continua. Ne consegue che F è differenziabile su tutto Ω come volevamo dimostrare. \square

3.9 Spazi L^p

Proposizione 3.9.1 (disuguaglianza di Young). *Siano $a, b > 0$ e $p, q \in]0, \infty[$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dimostrazione. Per la concavità del logaritmo abbiamo:

$$\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right).$$

Facendo l'esponenziale di ambo i membri otteniamo la tesi. \square

Sia (X, μ) uno spazio misurabile. Per $p \in [1, \infty[$ definiamo lo spazio $L^p(X, \mu)$ come l'insieme delle funzioni misurabili $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Teorema 3.9.2 (disuguaglianza di Hölder). *Sia (X, μ) uno spazio misurabile e siano $f \in L^p(X, \mu)$ e $g \in L^q(X, \mu)$ con $p, q \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Dimostrazione. Si ha, applicando la disuguaglianza di Young,

$$\frac{\int_X |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{q} \int_X \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

\square

3.10 Semi-continuità

Teorema 3.10.1. *Sia X uno spazio di Banach e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e continua. Allora F è debolmente s.c.i.*

Dimostrazione. Sia $A_a := F^{-1}(]a, +\infty[)$. Essendo F continua e convessa $X \setminus A_a$ è chiuso e convesso. Dunque $X \setminus A_a$ è anche debolmente chiuso (la topologia debole coincide con la forte sui convessi) e quindi A_a è debolmente aperto. Siccome gli insiemi $]a, +\infty[$ sono una base della topologia della semicontinuità inferiore su \mathbb{R} , abbiamo dimostrato che F è debolmente semicontinua inferiormente. \square

Teorema 3.10.2. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , e $f: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, u, p) \mapsto f(x, u, p)$ tale che*

(i) $x \mapsto f(x, u, p)$ è misurabile per ogni $u \in \mathbb{R}$ e ogni $p \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $u \mapsto f(x, u, p)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $p \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $p \mapsto f(x, u, p)$ è convessa per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}$.

Allora il funzionale $F: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ($p > 1$)

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx$$

è debolmente semicontinuo inferiormente.

Sarà vero?!?!?

3.11 Serie di Fourier

Sia H uno spazio di Hilbert e sia (\cdot, \cdot) il prodotto scalare su H .

Teorema 3.11.1 (proiezione ortogonale). *Sia $E \subset H$ un insieme convesso chiuso e non vuoto. Allora esiste unico un elemento di E con minima norma. Cioè esiste unico $x \in E$ tale che $|x| \leq |y|$ per ogni $y \in E$.*

In particolare, se V è un sottospazio vettoriale chiuso di H , possiamo definire l'applicazione lineare

$$\Pi_V: H \rightarrow V$$

che manda un punto w di H nel punto di V con minima distanza da w . Inoltre $\Pi(w)$ è caratterizzato dalla proprietà:

$$(w - \Pi(w), v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

cioè Π_v è una proiezione ortogonale.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che per $x, y \in H$ vale la regola del parallelogramma:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Sia ora $d = \inf_{x \in E} |x|$, e siano $x, y \in E$. Essendo E convesso, anche $\frac{x+y}{2} \in E$ e si ha dunque:

$$|x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2 - 4 \left| \frac{x+y}{2} \right|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2 - 4d^2.$$

Dunque se avessimo due punti x, y di minima distanza, cioè tali che $|x| = |y| = d$ si avrebbe allora $|x - y| = 0$ e quindi $x = y$ da cui l'unicità del punto di minima distanza. Vediamo ora l'esistenza. Sia $x_k \in E$ tale che $|x_k| \rightarrow d$. Dall'ultima disuguaglianza si ha

$$|x_k - x_j|^2 \leq 2|x_k|^2 + 2|x_j|^2 - 4d$$

e dunque $|x_k - x_j| \rightarrow 0$ per $k, j \rightarrow \infty$. Questo significa che x_k è una successione di Cauchy, ed essendo H completo $x_k \rightarrow x$.

Siccome E è chiuso si avrà $x \in E$, ed essendo $|\cdot|: H \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua si ottiene $|x| = d$, ovvero x è un punto di norma minima.

Ora, se V è un sottospazio chiuso di H , e $w \in H$ se prendiamo $E = V - w$ e chiamiamo $v - w$ l'elemento di minima norma di E , otteniamo che v è l'unico punto di minima distanza di V da w . Possiamo dunque definire la mappa $\Pi_V: H \rightarrow V$ che associa al punto $w \in H$ il punto v di V di minima distanza da w .

Notiamo ora che se $v \in V$ si ha

$$|w - (\Pi_V(w) + v)|^2 = |w - \Pi_V(w)|^2 + |v|^2 + 2(w - \Pi(w), v)$$

e dovendo essere $|w - (\Pi_V(w) + v)| \geq |w - \Pi_V(w)|$ si ottiene $(w - \Pi_V(w), v) \leq 0$. Analogamente si ottiene anche $(w - \Pi_V(w), -v) \leq 0$ da cui $(w - \Pi_V(w), v) = 0$. D'altra parte se per un certo $v' \in V$ si ha $(w - \bar{w}, v) \leq 0$ per ogni $v \in V$, si ha

$$|w - v'| \leq |w - v| \quad \forall v \in V$$

da cui $v' = \Pi_V(w)$.

Ci resta ora solo da verificare che Π_V è lineare. Il fatto che $\Pi_V(\lambda w) = \lambda \Pi_V(w)$ deriva direttamente dall'osservazione che $d(\lambda w, V) = |\lambda|d(w, V)$ e che $\Pi_V(w) = \Pi_V(-w)$.

Verifichiamo ora che $\Pi_V(w + w') = \Pi_V(w) + \Pi_V(w')$. Basta notare che, preso $v \in V$,

$$(w + w' - (\Pi_V(w) + \Pi_V(w')), v) = (w - \Pi_V(w), v) + (w' - \Pi_V(w'), v) = 0$$

e quindi per la caratterizzazione delle proiezioni si ottiene $\Pi_V(w) + \Pi_V(w') = \Pi_V(w + w')$. \square

Un insieme $\{e_k\}$ si dice un *sistema ortonormale completo* di H se:

1. $(e_j, e_k) = 0$ per $j \neq k$ (ortogonalità);
2. $(e_k, e_k) = 1$ (normalità);
3. $\forall k (v, e_k) = 0 \Rightarrow v = 0$ per $v \in H$ (completezza).

Teorema 3.11.2 (Serie di Fourier). *Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ un sistema ortonormale completo. Allora, per ogni $v \in H$ si ha*

$$v = \sum_k (v, e_k) e_k.$$

Inoltre si ha

$$\|v\|_H^2 = \sum_k |(v, e_k)|^2.$$

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio vettoriale $V \subset H$ generato dai vettori e_1, \dots, e_n, \dots , ovvero l'insieme delle combinazioni lineari finite di tali vettori:

$$V = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda^k e_k : n \in \mathbb{N}, \lambda^k \text{ scalare} \right\}.$$

L'insieme \bar{V} è un sottospazio vettoriale chiuso di H , verifichiamo ora che $\bar{V} = H$. Consideriamo la proiezione $\Pi = \Pi_{\bar{V}}: H \rightarrow \bar{V}$ come data dal teorema di proiezione ortogonale. Preso ora $w \in H$, si avrà per la caratterizzazione della proiezione ortogonale, $(w - \Pi(w), e_k) = 0$ per ogni k e dunque, per la completezza del sistema (e_k) , si ottiene $w - \Pi(w) = 0$ ovvero $w \in \bar{V}$, come volevamo dimostrare.

Dunque ogni elemento $v \in H$ può essere approssimato da elementi $v_n \in V_n$ dove

$$V_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda^k e_k : \lambda^k \text{ scalare} \right\} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $d(v, V_n) < \varepsilon$ e cioè, posto $\Pi_n = \Pi_{V_n}$, si ha $|v - \Pi_n(v)| < \varepsilon$. Essendo $\Pi_n(v) \in V_n$ si avrà $\Pi_n(v) = \sum_{k=1}^n \lambda^k e_k$, d'altra parte essendo $(v - \Pi_n(v), e_k) = 0$ per $k = 1, \dots, n$ si ottiene $\lambda^k = (\Pi_n(v), e_k) = (v, e_k)$. Dunque la successione

$$v_n = \sum_{k=1}^n (v, e_k) e_k$$

converge a v , cioè

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, e_k) e_k.$$

D'altra parte sapendo che anche $|v_n|$ converge a $|v|$ e che

$$|v_n|^2 = \sum_{k=1}^n |(v, e_k)|^2$$

si ottiene

$$|v|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(v, e_k)|^2.$$

□

A questo punto possiamo costruire un esempio concreto di sistema ortonormale completo, che ci permetterà di sviluppare in serie di Fourier le funzioni periodiche.

Consideriamo dunque lo spazio di Hilbert $H = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Vogliamo dimostrare che i vettori

$$e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

per $k \in \mathbf{Z}$ formano un sistema ortonormale completo.

Innanzitutto notiamo che

$$(e_k, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1$$

e

$$(e_j, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(j-k)x}}{i(j-k)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Poi si sceglie

$$Q_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k$$

....

Dunque se $f \in L^2([0, 2\pi])$ si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{in } L^2$$

con

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

e

$$\|f\|_2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |a_k|^2.$$

Se f è reale (ma tutto funziona anche se f è complessa!) può essere più comodo sviluppare la serie con seni e coseni, notando che il sistema $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$ è ortonormale e completo ($k = 1, 2, \dots$).

Dunque posto

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \end{aligned}$$

si ottiene

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$$

con

$$\|f\|_2 = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Teorema 3.11.3 (convergenza uniforme). *Se $f \in W^{1,2}([0, 2\pi])$ allora la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente.*

Teorema 3.11.4 (Dirichlet-Jordan, convergenza puntuale). *Se $f \in BV([0, 2\pi])$, allora*

1. *la serie di Fourier di f converge a f in ogni punto di continuità e a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ negli altri;*
2. *la convergenza è uniforme sui compatti su cui f è C^0 ;*
3. *le somme parziali sono uniformemente limitate.*

3.12 Trasformate di Fourier

Per $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ possiamo definire la trasformata di Fourier come:

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$$

definiamo poi il prodotto di convoluzione come

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Per $\lambda > 0$ definiamo

$$H_\lambda(t) := e^{-|\lambda t|}.$$

Lemma 3.12.1. *Si ha*

$$\hat{H}_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

e inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{H}_\lambda(x) = 1.$$

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} H_\lambda(x) &= \int e^{-|\lambda t|} e^{-itx} dt = \int_0^\infty e^{-t(\lambda+ix)} + e^{-t(\lambda-ix)} dt \\ &= \left[\frac{-1}{\lambda+ix} + \frac{-1}{\lambda-ix} \right]_0^\infty = \frac{1}{(\lambda+ix)(\lambda-ix)} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Per la seconda affermazione si ha

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{H}_\lambda(x) dx = \int \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} dx = [\arctan(x/\lambda)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

□

Cerchiamo ora di dimostrare che $\widehat{\widehat{f}} = f$ quando $f, \widehat{f} \in L^1$.

Visto che direttamente non ci si riesce tentiamo di usare H_λ e \widehat{H}_λ per approssimare f .

Il primo passo è dato dal seguente

Lemma 3.12.2. *Per $f \in L^1$ si ha*

$$\widehat{\widehat{Hf}}_\lambda = \widehat{f} * \widehat{H}_\lambda.$$

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{Hf}}_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \int \overline{f(y)e^{-ity}H_\lambda(t)e^{-itx}} dy dt = \frac{1}{2\pi} \int \int \overline{f(y)} e^{-it(x-y)} dy H_\lambda(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int \overline{f(x-y)} e^{-itx} dy H_\lambda(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int \int H_\lambda(t) e^{-ity} dt \overline{f(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{H}_\lambda(y) \overline{f(x-y)} dy = (\widehat{f} * \widehat{H}_\lambda)(x). \end{aligned}$$

□

A questo punto si nota che $H_\lambda(t) \rightarrow 1$ per $\lambda \rightarrow 0$. Vediamo in che senso $\widehat{H}_\lambda(x) \rightarrow \delta_0$.

Lemma 3.12.3. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p \in [0, \infty[$, si ha*

$$f * \widehat{H}_\lambda \rightarrow f$$

in $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, per $\lambda \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Dal Lemma 3.12.2 sappiamo che $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} H_\lambda(x) dx$ è una misura di probabilità a cui possiamo applicare la disuguaglianza di Jensen. Si ha dunque

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{p}{2}} \int |f * \widehat{H}_\lambda - f|^p &= \int \left| \int f(x-y) \widehat{H}_\lambda(y) dy - f(x) \right|^p dx \\ &= \int \left| \int [f(x-y) - f(x)] \widehat{H}_\lambda(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)|^p \widehat{H}_\lambda(y) dx dy. \end{aligned}$$

Chiamando ora $(\tau_y f)(x) := f(x-y)$, sappiamo che $\tau_y : L^p \rightarrow L^p$ è un operatore continuo. Dunque fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui se $|y| < \delta$ si ha $\|\tau_y f - f\|_p^p < \varepsilon$. D'altra parte, per λ sufficientemente piccolo si ha anche che $\int_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}_\delta} \widehat{H}_\lambda(x) dx < \varepsilon$.

Dunque, proseguendo le disuguaglianze, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_p^p \widehat{H}_\lambda(y) dy \leq \int_{\mathbb{B}_\delta} \varepsilon \widehat{H}_\lambda(y) dy + \int_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}_\delta} \|2f\|_p^p H_\lambda(y) dy \leq \varepsilon + \|2f\|_p^p \varepsilon$$

che può essere reso arbitrariamente piccolo. □

Teorema 3.12.4. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\cap f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Allora*

$$\widehat{\widehat{f}} = f \quad (\text{in } L^1).$$

Dimostrazione. Vogliamo applicare il Lemma 3.12.2. Da un lato, siccome $H_\lambda(t) \rightarrow 1$ (per $\lambda \rightarrow 0$) e $|H_\lambda(t)| \leq e^{-|t|}$ per $\lambda \leq 1$, per convergenza dominata si ha, per ogni x ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{H_\lambda}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\widehat{f}(t)H_\lambda(t)} e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\widehat{f}(t)} e^{-itx} dt = \widehat{\widehat{f}}(x).$$

D'altro canto, per il Lemma 3.12.3, sappiamo che $\bar{f} * \hat{H}_\lambda \rightarrow \bar{f}$ in L^1 e quindi, esiste una successione $\lambda_k \rightarrow 0$ su cui si ha convergenza quasi ovunque, cioè per quasi ogni x si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{f} * \hat{H}_{\lambda_k})(x) = \bar{f}(x).$$

Mettendo insieme le due cose si ottiene la tesi. \square